LEERBOEK WISKUNDE B VWO DEEL 4

GETAL & RUIMTE

B

Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo B deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 4
Samen met de delen 1, 2 en 3 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. Bij het schrijven van dit boek is goed gekeken naar de examens die de laatste jaren zijn afgenomen. Dat betekent dat ervoor gezorgd is dat de theorie en de opgaven aansluiten bij de vraagstelling en het niveau dat op het centraal examen gangbaar is.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
Dit boek is bestemd voor het zesde leerjaar. De hoofdstukken 13, 14 en 15 hebben samen een studielast van ongeveer 90 uur. Daarmee komt de totale studielast van de hoofdstukken 1 tot en met 15 plus het hoofdstuk met het keuzeonderwerp op ongeveer 500 uur. Er blijft dan tijd over om te werken aan hoofdstuk 16 Examentraining.
In hoofdstuk 13 Limieten en asymptoten komen de perforaties, de asymptoten en het limietgedrag van functies aan de orde (subdomein B6). Ook scheve asymptoten en de begrippen linker- en rechterlimiet behoren tot de leerstof.
Met hoofdstuk 14 Meetkunde toepassen wordt domein E Meetkunde met coördinaten afgesloten. Aan de orde komen berekeningen van de plaats van het zwaartepunt bij puntmassa's en homogene vormen. Ook is er aandacht voor berekeningen met bissectrices en middelloodlijnen, raaklijnproblemen bij cirkels en het berekenen van de coördinaten van snijpunten van lijnen en cirkels. Afgesloten wordt met berekeningen met vectoren bij bewegingen, wat grotendeels herhaling is.
In hoofdstuk 15 Afgeleiden en primitieven komen nog enkele aspecten van domein C aan de orde. Dit hoofdstuk bevat naast de nodige herhaling ook nieuwe onderwerpen, zoals het oplossen van optimaliseringsproblemen, het verband tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen en de eerste en tweede afgeleide, en het werken met evenredige en omgekeerd evenredige verbanden.
In hoofdstuk 16 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in zeven onderwerpen die elk in een paragraaf aan de orde komen. In deze editie begint elke paragraaf met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt wordt elk onderwerp bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de pilotexamens van 2016 en 2017 en de examens van 2018 en 2019.
De gemengde opgaven bij hoofdstuk 16 bestaan ook in deze editie uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen alle basisvaardigheden die een leerling voor het examen nodig heeft aan de orde.

Opbouw
De opbouw van de hoofdstukken 13, 14 en 15 is dezelfde als in de delen 1, 2 en 3. Deze hoofdstukken hebben een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven zijn er nog de afsluitende opgaven en de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.
Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes
In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. Zie voor verdere toelichting zo nodig het voorwoord van deel 1, 2 of 3.
In hoofdstuk 16 Examentraining is geen routering aanwezig.

Het schoolexamen en het centraal examen
Het gehele programma van vwo wiskunde B wordt centraal geëxamineerd. Het schoolexamen dient betrekking te hebben op domein A (Vaardigheden) in combinatie met ten minste het subdomein E1 (Meetkundige vaardigheden) en het domein F (Keuzeonderwerpen).

Getal & Ruimte online
Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.
Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2021

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

O2 **Oriëntatie-opgave**
Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 **Reflectie-opgave**
In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 **Extra opgave**
Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder route-aanduiding**
In de Diagnostische toets en de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding. Dit is ook het geval bij de examentraining.

[▸ WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

13 Limieten en asymptoten 6

Beginopdracht Het wereldrecord op de marathon bij de mannen 8
Voorkennis Limiet en afgeleide 9
13.1 Limieten en perforaties 10
13.2 Sprongen en knikken in grafieken 18
13.3 Asymptoten bij gebroken functies 24
13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies 34
Eindopdracht Het wereldrecord op de marathon bij de vrouwen 41
Diagnostische toets 42

14 Meetkunde toepassen 44

Beginopdracht De wankelmotor 46
Voorkennis Zwaartelijnen van een driehoek 48
14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices 49
14.2 Cirkels en raaklijnen 60
14.3 Cirkels en snijpunten 68
14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen 75
Eindopdracht De octopus 84
Diagnostische toets 86

15 Afgeleiden en primitieven 88

Beginopdracht Waterleidingnet 90
Voorkennis Lengten van lijnstukken 91
15.1 Lijnstukproblemen 93
15.2 Optimaliseringsproblemen 99
15.3 Hellingen en buigpunten 110
15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud 118
Eindopdracht Kosten bij waterleidingnet 129
Diagnostische toets 130

16 Examentraining 132

16.1 Algemene vaardigheden 134
16.2 Functies en grafieken 148
16.3 Differentiaal- en integraalrekening 154
16.4 Exponenten en logaritmen 166
16.5 Meetkunde 182
16.6 Vectoren en bewegingsvergelijkingen 191
16.7 Goniometrie 203

Gemengde opgaven 218
Overzicht GR-modules 244
Overzicht routes 245
Examenwerkwoorden 248
Trefwoordenregister 249
Verantwoording 250

13 Limieten en asymptoten

Wat leer je?

- Wat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent en hoe je limieten van de vorm $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ berekent.
- Wat een perforatie van een grafiek is en hoe je de coördinaten van een perforatie kunt berekenen met een limiet.
- De begrippen linker- en rechterlimiet.
- Hoe je hellingen in knikken van grafieken kunt berekenen met limieten.
- Het opstellen van vergelijkingen van verticale, horizontale en scheve asymptoten bij gebroken functies.
- Werken met limieten bij exponentiële en logaritmische functies.


NN
Abbott

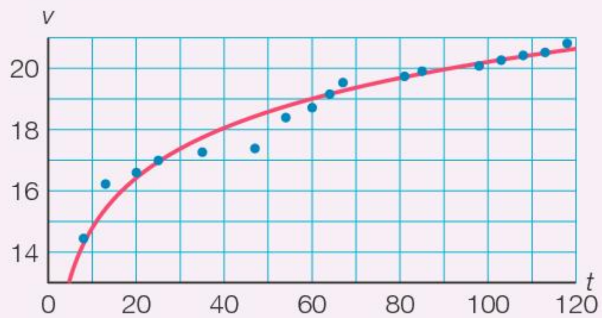
Beginopdracht Het wereldrecord op de marathon bij de mannen

De marathon is een hardloopwedstrijd over 42,195 km.
In 1960 liep Abebe Bikila de marathon in 2:15:16. Zijn gemiddelde snelheid was daarmee ongeveer 18,7 km/uur. De eerste die met een snelheid van meer dan 20 km/uur liep was Ronaldo da Costa in 1998. Zie de tabel hiernaast. Het wereldrecord staat (op moment van schrijven van dit boek) op 2:01:39 en werd op 16 september 2018 in Berlijn gelopen door Eliud Kipchoge.
In de figuur staan de gemiddelde snelheden van wereldrecords vanaf 1908. Op de horizontale as staat de tijd in jaren met $t = 0$ in 1900 en op de verticale as de gemiddelde snelheid v in km/uur. Ook is een kromme getekend die goed bij de getekende punten past.

WERELDRECORDS MARATHON MANNEN

jaar	atleet	tijd
1960	Abebe Bikila	2:15:16
1964	Abebe Bikila	2:12:11
1967	Derek Clayton	2:09:37
1981	Robert de Castella	2:08:18
1985	Carlos Lopes	2:07:12
1998	Ronaldo da Costa	2:06:05
2003	Paul Tergat	2:04:55
2008	Haile Gebrselassie	2:03:59
2013	Wilson Kipsang	2:03:23
2018	Eliud Kipchoge	2:01:39

GEMIDDELDE SNELHEID MANNEN



In deze opdracht werk je met wiskundige modellen waarmee je een voorspelling kunt doen over de wereldrecords op de marathon in de toekomst. Daarbij kun je je ook afvragen of er een grens is aan de gemiddelde snelheid waarmee de marathon zal worden gelopen.

Een model dat bij de kromme past is van de vorm $v = a + b\ln(t)$.

- Gebruik de wereldrecords van 1981 en van 2013 om de waarden van a en b te berekenen. Rond af op twee decimalen.
- Controleer of de gevonden formule klopt bij enkele andere waarden van de tabel.
- Onderzoek met de formule in welk jaar er naar verwachting voor het eerst onder de twee uur wordt gelopen op de marathon.
- Is er volgens de formule een grens aan de gemiddelde snelheid waarmee de marathon wordt gelopen? Licht toe.

Een ander model dat bij de punten in de figuur past is van de vorm $v = \dfrac{a}{1 + 0{,}5\,e^{bt}}$.

- Beantwoord dezelfde vier vragen als hierboven voor dit model. Rond nu b af op vier decimalen.

Voorkennis Limiet en afgeleide

Theorie A De definitie van de afgeleide

Je kent de definitie van de afgeleide.

De afgeleide f' van een functie f is $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Met deze definitie bewijs je als volgt dat $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Merk hierbij het volgende op.

- Voor $h = 0$ bestaat $\dfrac{2xh + h^2}{h}$ niet.
- Je mag bij $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h}$ teller en noemer delen door h omdat $h \neq 0$.
  Je berekent immers de limiet voor h naar 0, dus h is dan niet gelijk aan nul.
- Je neemt $h = 0$ in $\lim\limits_{h \to 0} (2x + h)$.

1 Bewijs met de definitie van de afgeleide.

a $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$

b $f(x) = ax^2$ geeft $f'(x) = 2ax$

2 Er geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$.

a Bewijs dit.

b Gebruik dat $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ om te bewijzen dat geldt $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$.

13.1 Limieten en perforaties

01 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

a Plot de grafiek van f.
b Bereken $f(1)$, $f(1{,}9)$, $f(1{,}99)$ en $f(2{,}01)$.
c Licht toe dat je $f(2)$ niet kunt berekenen.

Theorie A Limieten berekenen

Bij de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ van opgave 1 kun je $f(2)$ niet berekenen.

Bij invullen van $x = 2$ krijg je $\dfrac{8 - 8}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ en dat is onbepaald.

Omdat zowel in de teller als in de noemer van de breuk de factor $x - 2$ voorkomt, kun je schrijven $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \dfrac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2$, mits $x \neq 2$.

Voor $x \neq 2$ is $f(x)$ dus gelijk aan $g(x) = x^2$.
De functie $g(x) = x^2$ heeft domein $\mathbb{R}$ en de grafiek van g is een **ononderbroken kromme**. We zeggen dat de functie $g(x) = x^2$ **continu** is in $\mathbb{R}$.
Je hebt met een ononderbroken kromme te maken als je de grafiek kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen.

De functie f is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.

Omdat bij $g(x) = x^2$ geldt $g(2) = 4$ zal bij de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ voor $x \approx 2$ de functiewaarde van f in de buurt van 4 liggen. Door bij de functie f de waarde van x maar dicht genoeg bij 2 te kiezen, kan $f(x)$ onbeperkt dicht bij 4 komen.
We zeggen dat 4 de **continumakende waarde** van f is voor $x = 2$.
Notatie: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.
Uitspraak: de **limiet** voor x naar 2 van $f(x)$ is 4.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.

Bij de functie $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ is $h(3) = \dfrac{9 - 12 + 3}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$.

Dit betekent dat zowel de teller als de noemer een factor $x - 3$ bevat.

$h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = x - 1$, mits $x \neq 3$.

Het berekenen van de continumakende waarde voor $x = 3$ gaat met een limiet als volgt.

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2$

Dus 2 is de continumakende waarde voor $x = 3$.

Bij de functie h is $h(4) = \dfrac{16 - 16 + 3}{4 - 3} = \dfrac{3}{1} = 3$.

De functie h is continu in 4, dus $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = h(4)$.

Ook omgekeerd geldt: als $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = h(4)$, dan is h continu in 4.

Als de functie f continu is in a, dan geldt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Als voor de functie f geldt dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a.

Voorbeeld

Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

b $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 3) = 5$

b $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)(x + 4)}{(x + 2)(x + 3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 4}{x + 2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

R2 Zie het voorbeeld.

a Bereken $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$.

b Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$.

c Licht toe dat $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$ niet bestaat.

3 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

b $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$

c $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$

d $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

4 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

b $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

c $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

d $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3x^2}$

5 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + x}$

c $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

d $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 5x + 6}$

A6 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}$

b $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

c $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x - 5}$

d $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x - 2}{4x^2 - 1}$

A7 Bereken de continumakende waarde

a voor $x = 3$ bij $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + x - 12}$

b voor $x = \frac{1}{4}$ bij $g(x) = \dfrac{16x^2 - 1}{16x - 4}$.

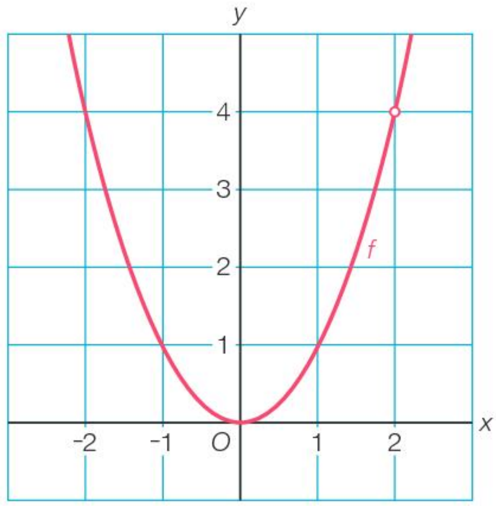
A8 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + x\sqrt{2} - 4}$

b $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{2x^2 + 15x - 8}$

09

Gegeven is nog eens de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ van opgave 1.
De grafiek van f valt samen met de grafiek van $g(x) = x^2$, maar voor $x = 2$ bestaat de grafiek van f niet.
De grafiek van f heeft een 'gaatje' voor $x = 2$.
De coördinaten van dit 'gaatje' zijn (2, 4).
Ook de grafiek van de functie $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ heeft een 'gaatje'.
Bereken de coördinaten van dit 'gaatje' en teken de grafiek van h.

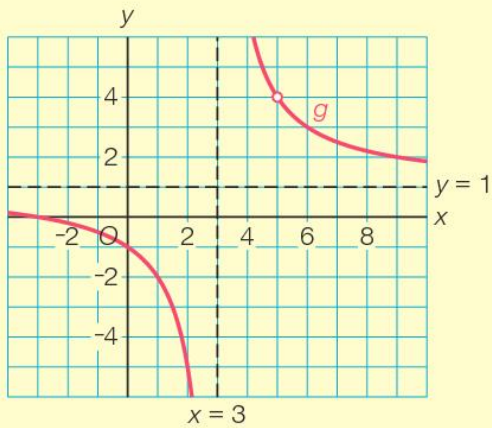


figuur 13.1 De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

Theorie B Perforaties

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ heeft een 'gaatje' voor $x = 2$.
We zeggen dat de grafiek van f een **perforatie** heeft voor $x = 2$.
De coördinaten van deze perforatie zijn (2, 4).
De grafiek van f is een parabool met perforatie (2, 4).

Ook de grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 8x + 15}$ heeft een perforatie.
Dit kun je inzien door de teller en de noemer te ontbinden.
Je krijgt $g(x) = \dfrac{(x + 3)(x - 5)}{(x - 3)(x - 5)}$.
Omdat van zowel de teller als de noemer $(x - 5)$ een factor is, krijg je $g(5) = \dfrac{0}{0}$.
Om de coördinaten van de perforatie te vinden, bereken je $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$.
Je krijgt $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x + 3)(x - 5)}{(x - 3)(x - 5)} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 3}{x - 3} = \dfrac{8}{2} = 4.$
De grafiek van g is de hyperbool $y = \dfrac{x + 3}{x - 3}$ met perforatie (5, 4).



figuur 13.2

Ook de grafiek van de functie $h(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x - 3}$ heeft een perforatie.

Het nulpunt van de noemer is $1\frac{1}{2}$ en $h(1\frac{1}{2}) = \dfrac{2 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} - 3}{0} = \dfrac{4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} - 3}{0} = \dfrac{0}{0}$.

Omdat ook de teller nul wordt voor $x = 1\frac{1}{2}$ is de teller te ontbinden, waarbij één van de factoren $(2x - 3)$ is.

Je krijgt $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$.

De y-coördinaat van de perforatie vind je door $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} h(x)$ te berekenen.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 3)(x + 1)}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} (x + 1) = 2\frac{1}{2}$.

De grafiek van h is de lijn $y = x + 1$ met perforatie $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

De grafiek van f heeft een perforatie (a, b) als $f(a)$ niet bestaat en $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Voorbeeld

Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door

$f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a}$.

Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

Uitwerking

$f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a} = \dfrac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x + a}$

Er is een perforatie als $a = 1$ en als $a = -3$.

Als $a = 1$, dan is de noemer $2x + 1$ en $2x + 1 = 0$ als $x = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (2x - 3) = -1 - 3 = -4$

Voor $a = 1$ is de perforatie $(-\frac{1}{2}, -4)$.

$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} (2x + 1) = 3 + 1 = 4$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 4)$.

10 Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

a $f_a(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + a}$

b $f_a(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x + a}$

c $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + a}$

11 Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

a $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 4\frac{1}{2}x + 2}{x + a}$

b $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 3x\sqrt{2} + 4}{x + a}$

c $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x + a}$

12 Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

a $f_a(x) = \dfrac{9x^2 + 6x - 8}{3x + a}$

b $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x + a}$

c $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{2x + a}$

R13 Zie het voorbeeld.
Reinier vindt de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft als volgt.
- het nulpunt van de noemer is $x = -\frac{1}{2}a$
- $x = -\frac{1}{2}a$ invullen in de teller geeft $a^2 + 2a - 3$
- de nulpunten van $a^2 + 2a - 3$ zijn 1 en -3, dus de bedoelde waarden zijn $a = 1$ en $a = -3$.

Licht toe waarom je op deze manier de waarden van a kunt vinden.

14 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x - a}$.
Voor elke waarde van a heeft de grafiek van f_a een perforatie.
Bereken voor welke a deze perforatie op de lijn $y = x - 3$ ligt.

A15

Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \dfrac{2x^2 + x - 10}{2x + a}$.

a Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken exact de waarden van a en de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

b De grafiek van f_a heeft een top voor $x = -1$.
Bereken exact de waarde van a en de coördinaten van de andere top van de grafiek van f_a.

A16

Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 14ax + 6a^2}{2x - a}$.
Voor elke waarde van a heeft de grafiek van f_a een perforatie.
Bereken exact voor welke a deze perforatie op de parabool $y = -2x^2 + 12$ ligt.

A17

Voor elke $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x + a}$.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft. De grafieken van f_a die bij deze waarden horen en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$ sluiten het vlakdeel V in.
Bereken exact de oppervlakte van V.

Terugblik

Limieten berekenen

De functie f is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.
Zo is de functie $f(x) = x + 1$ continu in $\mathbb{R}$.
De functie $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$ is niet continu in $\mathbb{R}$, want
$g(4) = \dfrac{4^2 - 3 \cdot 4 - 4}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ is onbepaald.
Je kunt wel de limiet van $g(x)$ voor x naar 4 berekenen.
$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4}(x + 1) = 5$$
We zeggen dat 5 de continumakende waarde van g is voor $x = 4$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.
Als voor een functie f geldt dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a.

Perforaties

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2}$ heeft een perforatie voor $x = 2$, want $f(2)$ bestaat niet en $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ bestaat wel. Om de coördinaten van de perforatie te vinden, bereken je $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Daartoe ontbind je $4x^2 - 11x + 6$ in twee factoren, waarvan de ene factor $(x - 2)$ is.
Je krijgt $4x^2 - 11x + 6 = (x - 2)(4x - 3)$.
Dus $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(4x - 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(4x - 3) = 5$.
De grafiek van f is de lijn $y = 4x - 3$ met de perforatie $(2, 5)$.

Bij de functie $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 16x + 15}{2x + a}$ zijn er twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft. Omdat $4x^2 - 16x + 15 = (2x - 3)(2x - 5)$ is er een perforatie voor $a = -3$ en voor $a = -5$.
$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 3)(2x - 5)}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}}(2x - 5) = -2$, dus voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, -2)$.

$\lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 3)(2x - 5)}{2x - 5} = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}}(2x - 3) = 2$, dus voor $a = -5$ is de perforatie $(2\frac{1}{2}, 2)$.

13.2 Sprongen en knikken in grafieken

O18 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \begin{cases} x^2 \text{ voor } x \leq 1 \\ -x + p \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

a Teken de grafiek van f_3.

b Is de grafiek van f_3 een ononderbroken kromme?

c Voor welke waarde van p is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme?

Theorie A Linker- en rechterlimiet

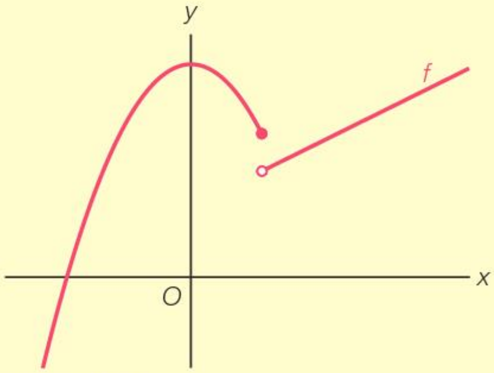
In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 \text{ voor } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$ getekend.

De twee gedeelten van de grafiek sluiten niet op elkaar aan. Om dit aan te tonen gebruiken we de begrippen **linkerlimiet** en **rechterlimiet**.

De linkerlimiet is
$\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1}(-x^2 + 3) = -1^2 + 3 = 2.$

De rechterlimiet is
$\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1}(\frac{1}{2}x + 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1\frac{1}{2}.$

Merk op dat in dit geval de linkerlimiet gelijk is aan de functiewaarde bij $x = 1$.



figuur 13.3

$x \uparrow 1$ spreek je uit als x stijgt naar 1.

$x \downarrow 1$ spreek je uit als x daalt naar 1.

Bij de functie $g_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \text{ voor } x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + p \text{ voor } x > 2 \end{cases}$

is de linkerlimiet $\lim\limits_{x \uparrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

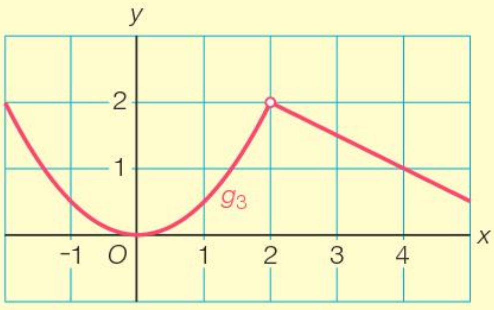
en de rechterlimiet $\lim\limits_{x \downarrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2}(-\frac{1}{2}x + p) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + p = p - 1.$

Voor $p = 3$ is $\lim\limits_{x \uparrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} g_p(x)$, want $p - 1 = 2$ geeft $p = 3$.

We zeggen dat $\lim\limits_{x \to 2} g_p(x)$ bestaat voor $p = 3$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van g_3 getekend. Merk op dat $g_3(2)$ niet bestaat.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.



figuur 13.4

Voorbeeld

Voor $0 < p < 1$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = \begin{cases} \sin(p\pi x) \text{ voor } x < 2 \\ \frac{1}{8}x^2 \text{ voor } x > 2 \end{cases}$

Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 2} f_p(x)$? Geef een exact antwoord.

Uitwerking

$\lim\limits_{x \uparrow 2} f_p(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \sin(p\pi x) = \sin(2p\pi)$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f_p(x)$ bestaat als $\sin(2p\pi) = \frac{1}{2}$

$$2p\pi = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2p\pi = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$p = \tfrac{1}{12} + k \cdot 1 \vee p = \tfrac{5}{12} + k \cdot 1$$

$0 < p < 1$ geeft $p = \frac{1}{12} \vee p = \frac{5}{12}$

19 Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f_p(x)$? Geef exacte antwoorden.

a $f_p(x) = \begin{cases} 2^{x-p} \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 7 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

b $f_p(x) = \begin{cases} e^{x+p} \text{ voor } x < 1 \\ x + 3 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

c $f_p(x) = \begin{cases} \ln(x+p) \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 1 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

d $f_p(x) = \begin{cases} |px - 2| \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 3x \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

INFORMATIEF

Continuïteit

De functie $y = f(x)$ is continu in a komt op hetzelfde neer als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Voor continuïteit in a moet dus $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaan en gelijk zijn aan $f(a)$.

Dat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ moet bestaan betekent dat moet gelden dat $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Bij de functies $f_p(x) = \begin{cases} x^2 \text{ voor } x \leq 1 \\ -x + p \text{ voor } x > 1 \end{cases}$ van opgave 18 is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f_p(x) = f_p(1)$.

Voor continuïteit moet dus nog gelden dat $\lim\limits_{x \downarrow 1} f_p(x) = f_p(1)$.

Dit geeft $-1 + p = 1$ oftewel $p = 2$.
Dus voor $p = 2$ is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme.

20 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} x^2 + p \text{ voor } x < 2 \\ 3x + q \text{ voor } 2 < x < 4 \\ -x^2 - px + 11 \text{ voor } x > 4 \end{cases}$

Voor welke p en q bestaan $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 4} f_{p,q}(x)$?

A21 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} 4\sin(p\pi x) \text{ voor } x < \frac{1}{4} \\ 8x^2 + qx + 2 \text{ voor } \frac{1}{4} < x < 3 \\ x^4 - 4x - 1 \text{ voor } x > 3 \end{cases}$

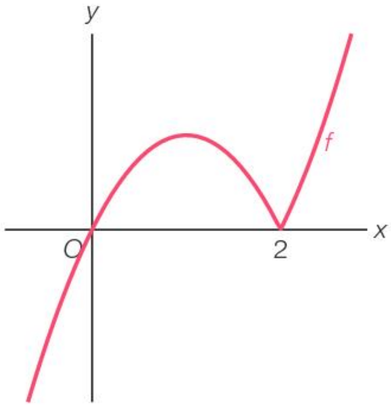
Voor welke p met $0 < p < 5$ en q bestaan $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$?

O22 Gegeven is de functie $f(x) = x \cdot |x - 2|$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Voor $x < 2$ is $f(x) = -x^2 + 2x$.

a Toon dit aan.
b Geef $f(x)$ voor $x \geq 2$.

Voor $x < 2$ is $f'(x) = -2x + 2$.

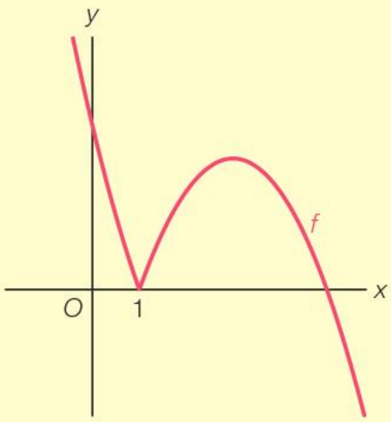
c Geef $f'(x)$ voor $x > 2$.
d Bereken $\lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x)$.
e Bestaat $\lim\limits_{x \to 2} f'(x)$? Licht toe.



figuur 13.5 $f(x) = x \cdot |x - 2|$

Theorie B Limieten en hellingen

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = (5 - x) \cdot |x - 1|$.
Voor $x \geq 1$ is $|x - 1| = x - 1$, dus voor $x \geq 1$ is $f(x) = (5 - x)(x - 1) = -x^2 + 6x - 5$.
Voor $x < 1$ is $|x - 1| = -x + 1$, dus voor $x < 1$ is $f(x) = (5 - x)(-x + 1) = x^2 - 6x + 5$.
Er geldt $\lim\limits_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1}(2x - 6) = -4$ en $\lim\limits_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1}(-2x + 6) = 4$.
Omdat $\lim\limits_{x \uparrow 1} f'(x) \neq \lim\limits_{x \downarrow 1} f'(x)$ bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ niet.
De grafiek van f heeft een **knik** in het punt $(1, 0)$.
In het knikpunt $(1, 0)$ heeft de grafiek van f twee raaklijnen.
Van de lijn k die het linkerdeel van de grafiek raakt in het knikpunt is $\text{rc}_k = -4$, dus k: $y = -4x + 4$.
Van de lijn l die het rechterdeel van de grafiek raakt in het knikpunt is $\text{rc}_l = 4$, dus l: $y = 4x - 4$.



figuur 13.6 $f(x) = (5 - x) \cdot |x - 1|$

Omdat $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ niet bestaat, bestaat de afgeleide alleen voor $x < 1$ en $x > 1$.

Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = (x+1) \cdot |x+p|$.
Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft.

Uitwerking

$f_p(x) = (x+1)(x+p) = x^2 + px + x + p$ voor $x + p \geq 0$, dus $x \geq -p$
$f_p(x) = (x+1)(-x-p) = -x^2 - px - x - p$ voor $x < -p$
$\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -p}(-2x - p - 1) = 2p - p - 1 = p - 1$
$\lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p}(2x + p + 1) = -2p + p + 1 = -p + 1$
Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x)$, dus als $p - 1 = -p + 1$
$2p = 2$
$p = 1$

R23 Zie de theorie met de functie $f(x) = (5 - x) \cdot |x - 1|$.

a Je hebt gezien dat $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \text{ voor } x \geq 1 \\ x^2 - 6x + 5 \text{ voor } x < 1 \end{cases}$

Frans noteert $f'(x) = \begin{cases} -2x + 6 \text{ voor } x \geq 1 \\ 2x - 6 \text{ voor } x < 1 \end{cases}$

Claire noteert $f'(x) = \begin{cases} -2x + 6 \text{ voor } x > 1 \\ 2x - 6 \text{ voor } x < 1 \end{cases}$

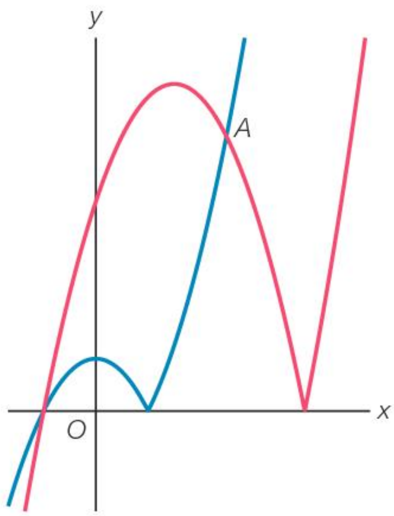
Welke notatie is juist? Licht toe.

b Teken de hellinggrafiek van f.

R24 Zie het voorbeeld.

a Schets de grafiek van f_1.

b Er zijn twee waarden van p waarvoor de grafiek van f_p door het punt $A(3, 4)$ gaat. De bijbehorende grafieken zijn hiernaast getekend.
Bereken deze waarden van p.



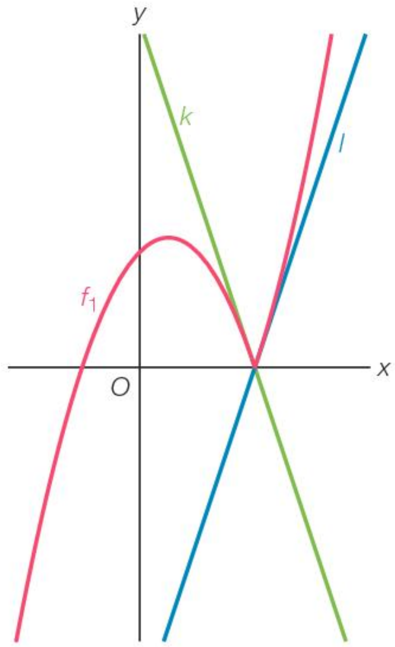
figuur 13.7

25 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (2x + 1) \cdot |x - p|$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f_1. De lijn k raakt het linkerdeel van de grafiek van f_1 in het knikpunt en de lijn l raakt het rechterdeel van de grafiek van f_1 in het knikpunt.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Er zijn twee waarden van p waarvoor de grafiek van f_p door het punt $(-1, -3)$ gaat.
Bereken deze waarden van p.

c Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft en schets de bijbehorende grafiek.



figuur 13.8

26 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (\frac{1}{2}x - 2) \cdot |x + p|$.

a Er zijn twee waarden van p waarvoor de grafiek van f_p door het punt $(2, -5)$ gaat.
Bereken deze waarden van p en schets de bijbehorende grafieken in één figuur.

b Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft.

Voor de waarden van p waarvoor de grafiek van f_p een knik heeft, raakt de lijn k het linkerdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt en raakt de lijn l het rechterdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt.

c Neem $p = 4$ en bereken de hoek tussen k en l. Rond af op gehele graden.

d Bereken exact voor welke p de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

A27 Voor elke $p \neq 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = |x - p| \cdot \ln(x)$.

a Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft.

Voor de waarden van p waarvoor de grafiek van f_p een knik heeft, raakt de lijn k het linkerdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt en raakt de lijn l het rechterdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt.

b Neem $p = 2$ en bereken de hoek tussen k en l. Rond af op gehele graden.

c Bereken exact voor welke p de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

Terugblik

Linker- en rechterlimiet

Als $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$, dan bestaat $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Hierbij is $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$ een linkerlimiet en $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ een rechterlimiet.

Om de waarde van p te berekenen waarvoor $\lim\limits_{x\to 3} f_p(x)$ bestaat bij de functie $f_p(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ voor } x \leq 3 \\ x^2 + p \text{ voor } x > 3 \end{cases}$

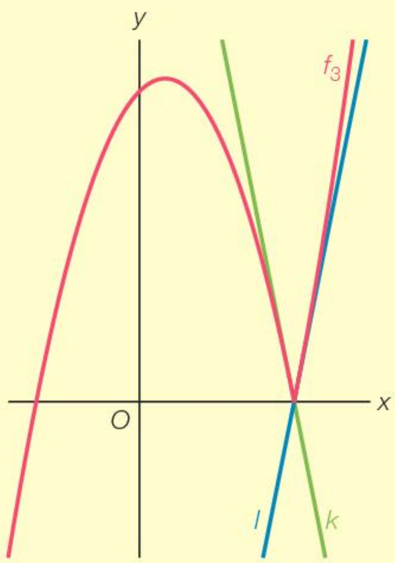
los je de vergelijking $\lim\limits_{x\uparrow 3} f_p(x) = \lim\limits_{x\downarrow 3} f_p(x)$ op.

Je krijgt $\lim\limits_{x\uparrow 3} f_p(x) = f_p(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ en

$\lim\limits_{x\downarrow 3} f_p(x) = \lim\limits_{x\downarrow 3}(x^2 + p) = 9 + p$, dus $5 = 9 + p$ en dit geeft $p = -4$.

Limieten en hellingen

De grafiek van de functie $f(x) = (x + 2) \cdot |x - 3|$ heeft een knik. Zie de figuur hiernaast. Het knikpunt is (3, 0). Je kunt de hoek berekenen die de raaklijnen k en l in het knikpunt met elkaar maken.



$f(x) = (x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$ voor $x \geq 3$, dus

$f'(x) = 2x - 1$ voor $x > 3$.

$f(x) = (x + 2)(-x + 3) = -x^2 + x + 6$ voor $x < 3$, dus

$f'(x) = -2x + 1$ voor $x < 3$.

$\lim\limits_{x\uparrow 3} f'(x) = \lim\limits_{x\uparrow 3}(-2x + 1) = -5$, dus $\text{rc}_k = -5$ en

$\tan(\alpha) = -5$ geeft $\alpha = -78{,}69...^\circ$

$\lim\limits_{x\downarrow 3} f'(x) = \lim\limits_{x\downarrow 3}(2x - 1) = 5$, dus $\text{rc}_l = 5$ en

$\tan(\beta) = 5$ geeft $\beta = 78{,}69...^\circ$

$\beta - \alpha = 78{,}69...^\circ - -78{,}69...^\circ \approx 157^\circ$, dus

$\angle(k, l) \approx 180^\circ - 157^\circ = 23^\circ$.

Er is een waarde van p waarvoor de grafiek van $f_p(x) = (x + 2) \cdot |x - p|$ geen knik heeft. Er geldt dan dat $\lim\limits_{x\uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x\downarrow p} f_p'(x)$.

$f_p(x) = (x + 2)(x - p) = x^2 - px + 2x - 2p$ voor $x \geq p$

$f_p(x) = (x + 2)(-x + p) = -x^2 + px - 2x + 2p$ voor $x < p$

$\lim\limits_{x\uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x\uparrow p}(-2x + p - 2) = -2p + p - 2 = -p - 2$

$\lim\limits_{x\downarrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x\downarrow p}(2x - p + 2) = 2p - p + 2 = p + 2$

$\lim\limits_{x\uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x\downarrow p} f_p'(x)$ geeft $-p - 2 = p + 2$, dus $p = -2$.

13.3 Asymptoten bij gebroken functies

028

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$.

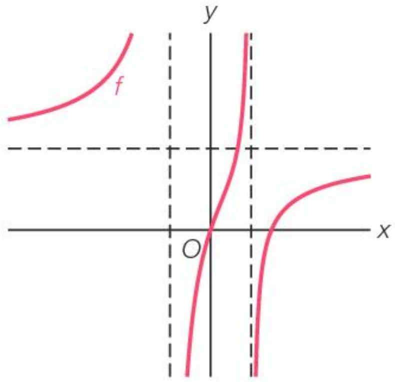
In figuur 13.9 zie je de grafiek van f. De grafiek heeft twee verticale asymptoten en een horizontale asymptoot.

a Bereken $f(1{,}1)$, $f(1{,}01)$ en $f(1{,}001)$. Rond af op gehelen.

b Er geldt $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$. Geef $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x)$.

c Bereken $f(10)$, $f(100)$ en $f(1000)$. Rond af op drie decimalen.
Wat denk je dat de uitkomst is van $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?

d Geef $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



figuur 13.9

Theorie A Verticale en horizontale asymptoten

In opgave 28 heb je gezien dat $\lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = -\infty$.

$x = 1$ invullen bij $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ geeft $\dfrac{2 - 3}{1 - 1} = \dfrac{-1}{0}$, dus $f(1)$ bestaat niet.

Omdat voor $x = 1$ geldt noemer = 0 en teller $\neq 0$ is de lijn $x = 1$ verticale asymptoot van de grafiek van f.

Omdat $f(-1) = \dfrac{2 + 3}{1 - 1} = \dfrac{5}{0}$ is ook de lijn $x = -1$ verticale asymptoot van de grafiek van f.

Verticale asymptoten bij gebroken functies
Los op noemer = 0 en teller $\neq$ 0.

Om de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ te vinden, berekenen we $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
Daartoe delen we teller en noemer door de hoogste macht van x in de noemer en gebruiken we $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$.

Dit geeft $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{2 - 0}{1 - 0} = 2$ en

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2.$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

Horizontale asymptoten bij gebroken functies
Deel teller en noemer door de hoogste macht van x in de noemer
en gebruik dat voor $n > 0$ geldt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$.

Voorbeeld

Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{|2x^3 - 16|}{x^3 - 1}$.

Aanpak

Bij het berekenen van de formules van horizontale asymptoten gebruik je $|2x^3 - 16| = \begin{cases} 2x^3 - 16 \text{ als } 2x^3 - 16 \geq 0 \text{, oftewel } x \geq 2. \\ -(2x^3 - 16) \text{ als } x < 2 \end{cases}$

Dus $|2x^3 - 16| = 2x^3 - 16$ als $x \to \infty$
en $|2x^3 - 16| = -(2x^3 - 16) = -2x^3 + 16$ als $x \to -\infty$.

Uitwerking

$x^3 - 1 = 0 \wedge |2x^3 - 16| \neq 0$
$x^3 = 1 \wedge x^3 \neq 8$
$x = 1$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{|2x^3 - 16|}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 16}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{16}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

Voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|2x^3 - 16|}{x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 16}{x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{16}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-2 + 0}{1 - 0} = -2$$

Voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -2$.

De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{2x^3 - 16}{x^2 - 1}$ heeft geen horizontale asymptoot.

Je kunt nagaan dat geldt als $x \to \infty$ dan $g(x) \to \infty$
als $x \to -\infty$ dan $g(x) \to -\infty$.
Men noteert ook wel $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 16}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - \frac{16}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

R29 **a** Zie opgave 28 en de theorie met de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$.

De horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2$.
Dat wil echter niet zeggen dat $f(x)$ niet gelijk aan 2 kan worden.
Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f en de lijn $y = 2$.

b Gegeven zijn de functies $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$ en $h(x) = \dfrac{x}{x^2}$.

Schets de grafieken van g en h in één figuur en verklaar het verschil tussen de twee grafieken.

30 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x}{2 - x^2}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x^3}{2x^3}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2}{2 - x^3}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^2}{x^2 + 1}$

31 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(3x - 1)^2}{(2x + 1)^2}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x| + 1}{1 - |x|}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2 - x^2|}{(x + 1)^2}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

32 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(4x - 1)^2}{x^3 + 4}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(2x + 1)^2}{x^3 + 1}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x^3 - 8|}{2x^3 + x}$

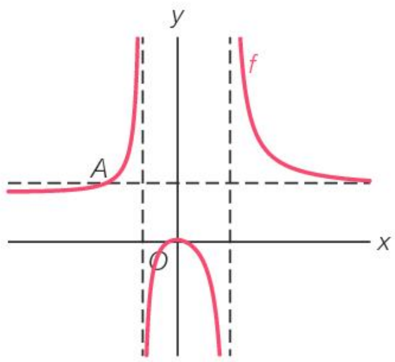
d $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|4x^3| - 10}{|x^3 - 1|}$

33 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$.

a Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.

b De horizontale asymptoot van de grafiek van f snijdt de grafiek in het punt A.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

c Los de ongelijkheid $f(x) < 4\frac{1}{2}$ exact op.



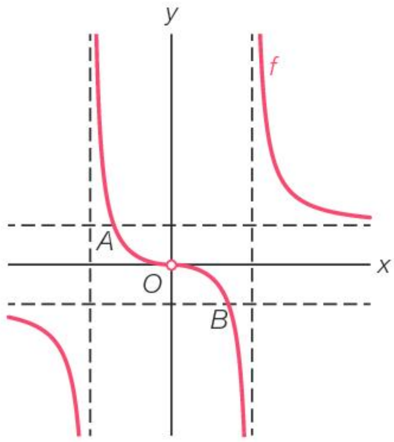
figuur 13.10

34 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{|x^3|}{x^3 - 4x}$.

a Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.

b De horizontale asymptoten snijden de grafiek van f in de punten A en B.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k door A en B.

c Los exact op $f(x) > 1\frac{1}{3}$.



figuur 13.11

A35 **a** De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{ax^2 + 5}{bx^2 - 18}$ heeft de asymptoten $x = -3$, $x = 3$ en $y = 6$.
Bereken a en b.

b De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 1}{ax^4 + bx^3 - 2}$ heeft de asymptoten $x = -2$, $x = 2$ en $y = 0$.
Bereken a en b.

INFORMATIEF

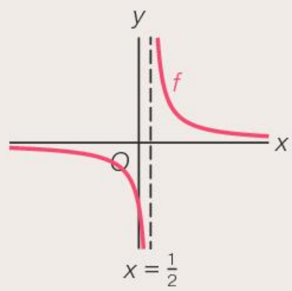
Situaties bij nul gedeeld door nul

Geldt bij een functie van de vorm $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ dat $t(a) = 0 \wedge n(a) = 0$, dan verwacht je een perforatie bij $x = a$, maar dat hoeft niet zo te zijn. We laten zien dat er ook een asymptoot of een sprong kan zijn.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{4x - 2}{4x^2 - 4x + 1}$ is zowel de teller als de noemer 0 voor $x = \frac{1}{2}$. Herleiden geeft

$$f(x) = \frac{4x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{2(2x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{2x - 1}.$$

De lijn $x = \frac{1}{2}$ is verticale asymptoot van de grafiek van f.

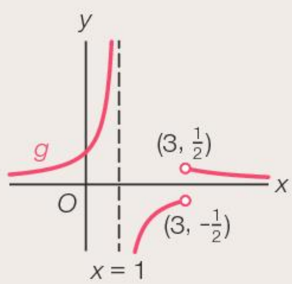


Bij de functie $g(x) = \dfrac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3}$ is zowel de teller als de noemer 0 voor $x = 3$.

$$\lim_{x \downarrow 3} g(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

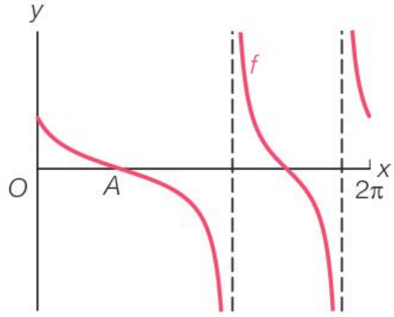
$$\lim_{x \uparrow 3} g(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-1}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

Omdat $\lim_{x \downarrow 3} g(x) \neq \lim_{x \uparrow 3} g(x)$ bestaat $\lim_{x \to 3} g(x)$ niet.
De grafiek van g maakt een sprong bij $x = 3$.



A36 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A. De asymptoten van de grafiek van f snijden elkaar in het punt B.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn k door A en B door de perforatie van de grafiek van f gaat.

37 Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ is gegeven de functie
$f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sin(x) + 1}$. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Het punt A is een van de snijpunten van de grafiek met de x-as. De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten B en C.
Bereken exact de coördinaten van B en C.

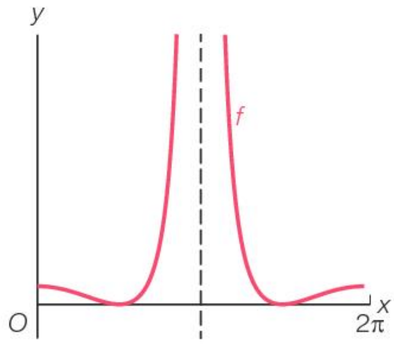


figuur 13.12

38 Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b De lijn $y = \frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f in twee toppen en snijdt de grafiek in de punten A en B met $x_A < x_B$.
Bereken exact de afstand van A tot de verticale asymptoot van de grafiek.



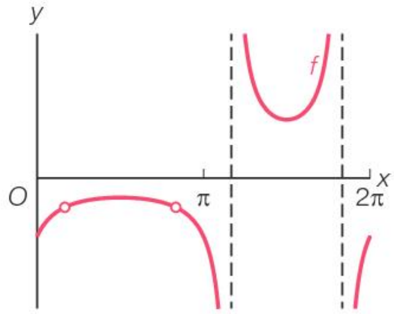
figuur 13.13

A39 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sqrt{3} - 2\sin(ax)}$ met $0 < a < 1$.

a Bereken exact voor welke a de lijn $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

b Onderzoek of er een waarde van a bestaat waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.

A40 Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{4\sin(x) - 2}{4\cos^2(x) - 3}$.
De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten en twee perforaties.
Bereken exact de vergelijkingen van de asymptoten en de coördinaten van de perforaties.



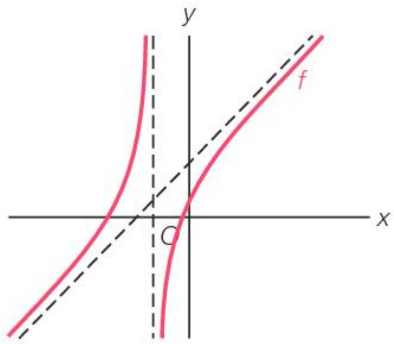
figuur 13.14

041 Gegeven is de functie $f(x) = x + 3 - \dfrac{4}{x+2}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.

a Licht toe dat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$.
Wat volgt hieruit voor de grafiek van f?

b Gegeven zijn de functies $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = \dfrac{3}{x+1}$ en $s(x) = g(x) + h(x)$.
Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$. Wat betekent dit voor de grafiek van s?

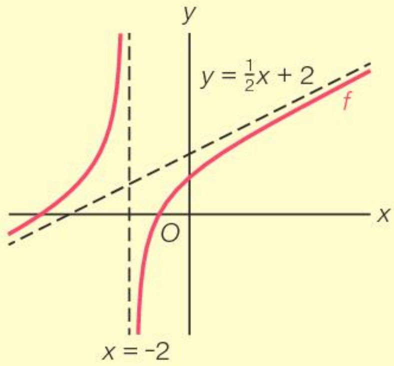


figuur 13.15

Theorie B Scheve asymptoten

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ heeft een **scheve asymptoot**. Dit kun je aantonen door het functievoorschrift te schrijven als $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x+4}$ en vervolgens te laten zien dat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x+4} = 0$.

Het herleiden van $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ tot $\frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x+4}$ doe je door uit te delen.



figuur 13.16

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{\frac{1}{2}x(2x + 4) - 2x + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + \frac{4x + 5}{2x + 4}$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{2(2x + 4) - 8 + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{3}{2x + 4}$$

Dus $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x+4}$.

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x+4} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x+4} = 0$ nadert de grafiek van f tot de lijn $y = \frac{1}{2}x + 2$. Dat wil zeggen dat de grafiek van f **asymptotisch nadert** tot de lijn $y = \frac{1}{2}x + 2$. Daarom is deze lijn de scheve asymptoot van de grafiek.

Een gebroken functie f waarvan het functievoorschrift is te schrijven in de vorm $f(x) = ax + b + \dfrac{t(x)}{n(x)}$ en waarbij $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{t(x)}{n(x)} = 0$ heeft een grafiek waarbij de scheve asymptoot de lijn $y = ax + b$ is.

De grafiek van een gebroken functie f heeft de scheve asymptoot $y = ax + b$ als het functievoorschrift van f te schrijven is in de vorm $f(x) = ax + b + \dfrac{t(x)}{n(x)}$ en waarbij geldt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{t(x)}{n(x)} = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$.

Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

Uitwerking

$x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$x^2 = 4 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$(x = 2 \vee x = -2) \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$x = 2 \vee x = -2$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

> Voor $x = 2$ is
> $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 3 \neq 0$.
>
> Voor $x = -2$ is
> $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 3 \neq 0$.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$$

$$= x + \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4} = x + \frac{2(x^2 - 4) + 8 - 5}{x^2 - 4} = x + 2 + \frac{3}{x^2 - 4}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x^2 - 4} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 2$.

R42

Zie de theorie op de vorige bladzijde met de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$.

Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{|2x + 4|}$.

De grafiek van g heeft twee scheve asymptoten.

a Toon aan dat voor $x < -2$ geldt $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2 + \dfrac{3}{2x + 4}$.

b Geef de formules van de twee scheve asymptoten van de grafiek van g.

c Schets de grafiek van g.

INFORMATIEF

Staartdelen in plaats van uitdelen

Je kunt de formule $y = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ ook schrijven als $y = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$ met een staartdeling. Dit gaat als volgt.

$\boxed{\dfrac{x^2}{2x} = \frac{1}{2}x}$

$2x + 4 \ / \ x^2 + 6x + 5 \ \backslash \ \frac{1}{2}x + 2$

$\boxed{\frac{1}{2}x(2x + 4)} \rightarrow x^2 + 2x \ -$

$4x + 5$

$\boxed{\dfrac{4x}{2x} = 2}$

$\boxed{2(2x + 4)} \rightarrow 4x + 8 \ -$

-3

Dus $y = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$.

43 Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

a $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{x - 1}$

b $g(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$

c $h(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x + 31}{x^2 - 9}$

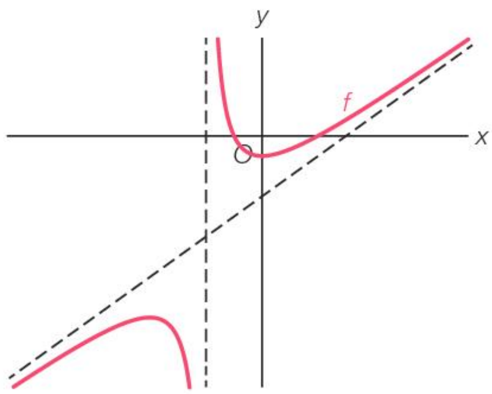
d $j(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

44 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Los exact op $f(x) \leq 0$.



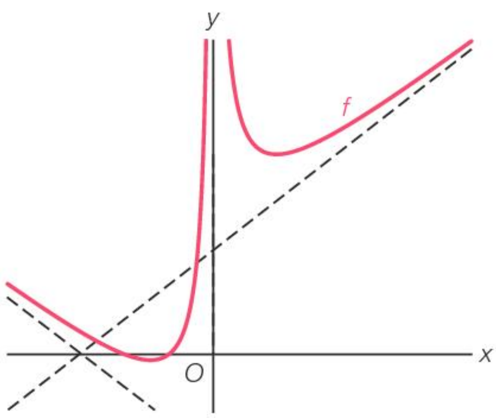
figuur 13.17

45 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{|x|}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Los exact op $f(x) \leq 6$.



figuur 13.18

46 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$.

a De grafiek van f_2 heeft een scheve asymptoot.
Stel de formule van deze scheve asymptoot op.

b De functie f_4 heeft twee extreme waarden.
Bereken exact deze extreme waarden.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken algebraïsch de coördinaten van deze perforaties.

47 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$ van opgave 46.
De functie heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken exact de andere extreme waarde.

48 ⊙∗ Voor elke waarde van a zijn gegeven de functies $f_a(x) = \dfrac{3x^2 + 11x + a}{3x - 1}$.

De scheve asymptoot van de grafiek f_0 is de lijn k: $y = mx + n$.

a Bereken voor welke x geldt $|f_0(x) - (mx + n)| < 0{,}01$.

Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.

b Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

A49 ⊙∗ Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 + x - 6}$.

Het punt A is de perforatie van de grafiek van f. Het punt B is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f. De lijn k gaat door de punten A en B

a Bereken exact de coördinaten van het snijpunt C van k met de y-as.

b Door het punt A aan de grafiek van f toe te voegen, ontstaat de grafiek van de functie g.
De lijn l snijdt de grafiek van g loodrecht in A.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt D van l met de y-as.

Terugblik

Limieten bij gebroken vormen

Om $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2}$ te berekenen, deel je de teller en de noemer door de hoogste macht van x in de noemer. Gebruik verder dat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 - \dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2} - 1} = \dfrac{4 - 0}{0 - 1} = -4$. Ook is $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2} = -4$.

Je weet nu dat de horizontale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2}$ de lijn $y = -4$ is.

De verticale asymptoten van de grafiek van f krijg je door op te lossen noemer = 0 $\wedge$ teller $\neq 0$.

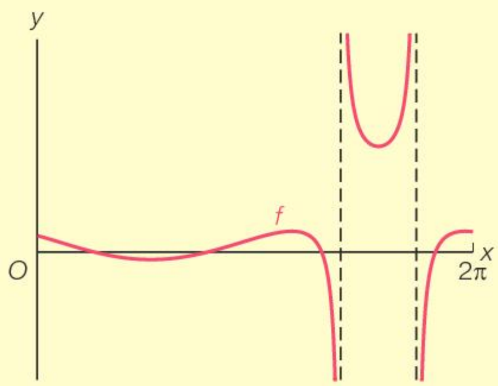
Je krijgt $4 - x^2 = 0 \wedge 4x^2 - 8 \neq 0$

$x^2 = 4 \wedge 4x^2 \neq 2$

$x = 2 \vee x = -2$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{3} + 2\sin(x)}$ heeft in $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten.
Om de formules van deze asymptoten te berekenen, los je op $\sqrt{3} + 2\sin(x) = 0 \wedge \cos(2x) \neq 0$.
Dit geeft $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1\frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



Scheve asymptoten

Bij de gebroken functie $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 8}{4 - x^2}$ is het functievoorschrift met behulp van uitdelen te schrijven als $f(x) = -2x + 1 + \dfrac{8x + 4}{4 - x^2}$.

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 8}{4 - x^2} = \frac{-2x(4 - x^2) + 8x - x^2 + 8}{4 - x^2} = -2x + \frac{4 - x^2 + 8x + 4}{4 - x^2} = -2x + 1 + \frac{8x + 4}{4 - x^2}$$

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x + 4}{4 - x^2} = 0$ is de lijn $y = -2x + 1$ scheve asymptoot. Omdat ook $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x + 4}{4 - x^2} = 0$ nadert de grafiek van f onbeperkt dicht tot de lijn $y = -2x + 1$ voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

O50 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

a Vul de tabel hiernaast in. Rond zo nodig af op twee decimalen.

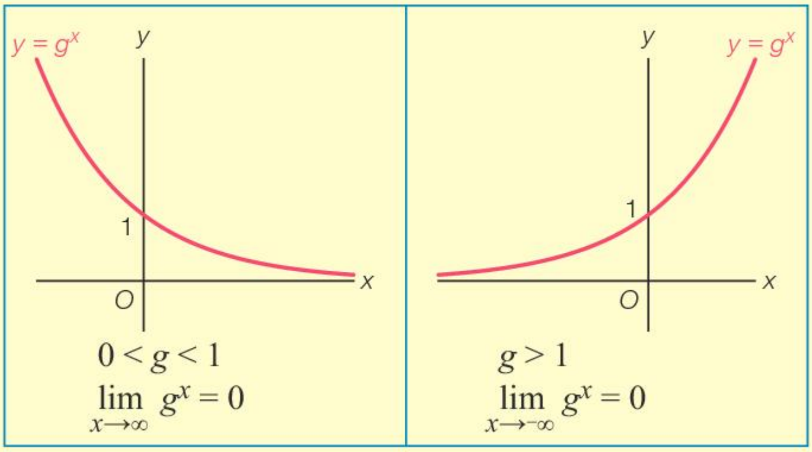
b Schets de grafiek van f.

c De grafiek van f heeft twee horizontale asymptoten.
Welke lijnen zijn dat, denk je?

x	−6	−3	0	3	6
$f(x)$					

Theorie A Limieten bij exponentiële functies

In de figuur hieronder zie je nog eens de standaardgrafiek $y = g^x$.
Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$ en voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.
Zo is $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{1}{2})^x = 0$ en ook $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{-x} = 0$. Dit laatste kun je inzien door te bedenken dat $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$.
Verder is bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, immers $\mathrm{e} > 1$.



figuur 13.19

Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$ en voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Deze limieten gebruik je om de formules van de horizontale asymptoten van de grafiek van $f(x) = \dfrac{6\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ te berekenen. Je krijgt

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{6 \cdot 0}{0 + 1} = 0$, dus voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.

Deel teller en noemer door e^x.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6\,e^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{1 + \dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{6}{1 + 0} = 6$, dus voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 6$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{e^x} = 0$$

Voorbeeld

Stel van elke asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{2\,e^x + 1}{e^x - 2}$ de formule op.

Uitwerking

$e^x - 2 = 0 \wedge 2\,e^x + 1 \neq 0$
$e^x = 2 \qquad \wedge 2\,e^x \neq -1$
$x = \ln(2)$
De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(2)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2\,e^x + 1}{e^x - 2} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 2} = -\tfrac{1}{2}$$

Voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2\,e^x + 1}{e^x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \dfrac{1}{e^x}}{1 - \dfrac{2}{e^x}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

Voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2$.

R51 Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \dfrac{2\,e^x + 1}{e^x - 2}$.

a Schets de grafiek van f met de asymptoten.

b Gegeven is de functie $g(x) = 3x - 4 + \dfrac{2\,e^x + 1}{e^x - 2}$.
Geef de formules van de scheve asymptoten van de grafiek van g.

52 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} (10 - 4 \cdot (\frac{1}{2})^x)$

b $\lim\limits_{x \to \infty} (2 + 4\,e^{-x})$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 3}{e^x + 2}$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 \cdot 3^x + 1}{3 \cdot 2^x + 1}$

e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4\,e^x + 3}{2 - e^x}$

f $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x + 16}{4^x - 1}$

53

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op en schets de grafiek van f.

b Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

c De lijn k raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y-as.
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van k.

A54

Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + q}$.

a Voor welke q heeft de grafiek van $f_{-1,q}$ geen verticale asymptoot?

b Voor welke p en q is van de grafiek voor $x \to -\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = -3$ en voor $x \to \infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = 4$?

c Voor welke p en q is de lijn $x = 2$ verticale asymptoot van de grafiek en voor $x \to \infty$ de lijn $y = 2$ horizontale asymptoot? Wat is in dit geval de horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$?

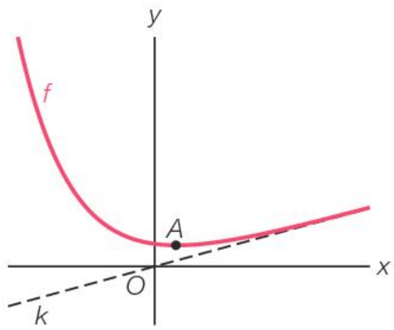
d Voor welke p en q heeft de grafiek een perforatie voor $x = -\ln(2)$?

A55

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^{x+2}}$.

De grafiek van f heeft top $A\left(\ln(1\tfrac{1}{2}), \dfrac{2\ln(1\tfrac{1}{2}) + 2}{\mathrm{e}^2}\right)$.

De scheve asymptoot is de lijn k: $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}x$.



figuur 13.20

a Bewijs dat de coördinaten van de top juist zijn.

b Bewijs dat de formule van de scheve asymptoot juist is.

De verticale afstand tussen het punt A en de scheve asymptoot noemen we p.

c Bereken voor welke x de verticale afstand tussen een punt van de grafiek van f en de scheve asymptoot gelijk is aan $0{,}01p$. Rond af op twee decimalen.

A56

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Toon aan dat de grafiek van f één horizontale asymptoot heeft en geef de formule van deze asymptoot.

c Los de ongelijkheid $f(x) \leq 1\tfrac{1}{2}$ exact op.

d De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van k.

057

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$.

a De grafiek van f heeft een verticale asymptoot. Stel van deze asymptoot de formule op.
b Bereken het nulpunt van f.
c Vul de tabel hiernaast in. Rond zo nodig af op twee decimalen.
d Schets de grafiek van f.
e Wat is de uitkomst van $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$, denk je?
f Denk je dat de grafiek van f een horizontale asymptoot heeft?

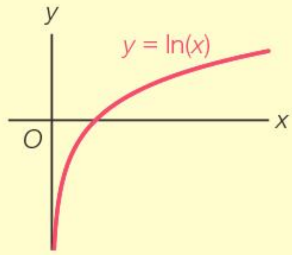
x	0,00001	0,0001	10	100
$f(x)$				

Theorie B Limieten bij logaritmische functies

In figuur 13.21 is de standaardgrafiek $y = \ln(x)$ getekend.
Er geldt: als $x \downarrow 0$ dan $\ln(x) \to -\infty$ en als $x \to \infty$ dan $\ln(x) \to \infty$.
Dit gebruik je om bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$ en $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$ te berekenen. Je krijgt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

en $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

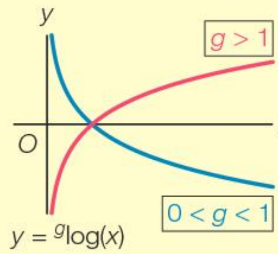


figuur 13.21

De functie $y = \ln(x)$ is van de vorm $y = {}^{g}\log(x)$ met $g > 1$.
Voor elke logaritme met grondtal $g > 1$ geldt $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^{g}\log(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} {}^{g}\log(x) = \infty$.

Voor $0 < g < 1$ geldt
als $x \downarrow 0$ dan ${}^{g}\log(x) \to \infty$ en als $x \to \infty$ dan ${}^{g}\log(x) \to -\infty$.

Voor $g > 1$ geldt
als $x \downarrow 0$ dan ${}^{g}\log(x) \to -\infty$ en als $x \to \infty$ dan ${}^{g}\log(x) \to \infty$.



Bij het berekenen van $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x^2) + 1}$ gebruik je een rekenregel voor logaritmen.
Je krijgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x^2) + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{\ln(x)}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{2 + 0} = \tfrac{1}{2}.$$

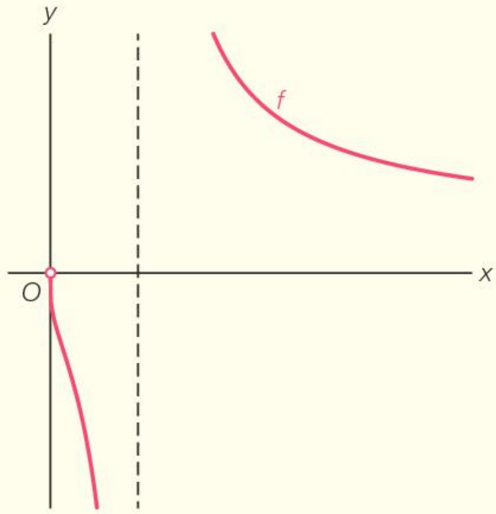
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4}{2\ln(x) - 1}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.

a Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.



figuur 13.22

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} =$

$$\lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{\dfrac{4}{\ln(x)}}{2 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{0}{2 - 0} = 0$$

b $2\ln(x) - 1 = 0$

$\ln(x) = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \sqrt{e}$.

$$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{\dfrac{4}{\ln(x)}}{2 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{0}{2 - 0} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

58 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4\ln(x)}{1 + \ln(x)}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2)}{1 + \ln(x^2)}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln|x|}{4 + \ln(x^2)}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln^2(x)}{2 - \ln^2(x)}$

59 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + \ln(x)}{\ln(\sqrt{x})}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1 + {}^{8}\log(x)}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{1 - 2\ln|x|}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \ln(x)}{2 + \log(x)}$

60

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 3}$.

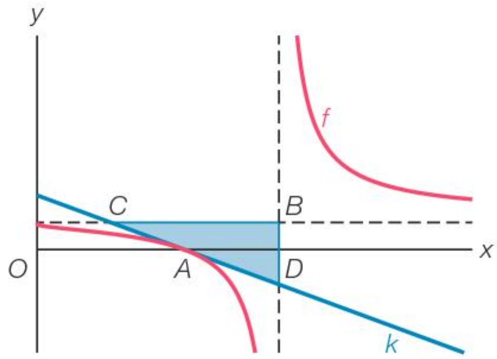
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A. De lijn k raakt de grafiek van f in A.

Het punt B is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f. De lijn k snijdt de asymptoten in de punten C en D. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Bereken exact de oppervlakte van driehoek BCD.

c De functie f^{inv} is de inverse van f.
De grafiek van f^{inv} snijdt de grafiek van de functie $g(x) = e^{2x}$ in de punten E en F.
Bereken exact de coördinaten van E en F.



figuur 13.23

A61

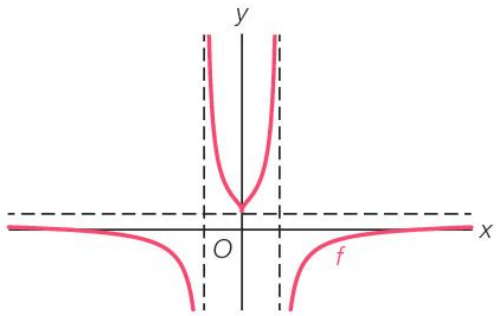
Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

c Los exact op $f(x) \leq 10$.

d De grafiek van f snijdt de positieve x-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van f in A.
De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt B van l met de y-as.



figuur 13.24

A62

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln^2(x) - 1}{\ln(x) - 1}$.

De perforatie van de grafiek van f is het punt A. Door het punt A toe te voegen aan de grafiek van f ontstaat de grafiek van de functie g.
De lijn k snijdt de grafiek van g loodrecht in het punt A.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van g, de lijn k en de x-as.
Gebruik dat $H(x) = x\ln(x) - x$ een primitieve is van $h(x) = \ln(x)$.

Terugblik

Limieten bij exponentiële functies

Je gebruikt de limieten

- voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$
- voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Bij $f(x) = 6 - 3 \cdot (\frac{4}{5})^x$ krijg je $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (6 - 3 \cdot (\frac{4}{5})^x) = 6 - 3 \cdot 0 = 6$.

Bij $g(x) = 2 + 4\,e^x$ krijg je $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 + 4\,e^x) = 2 + 4 \cdot 0 = 2$.

Bij de functie $h(x) = \dfrac{5\,e^x + 4}{2\,e^x - 6}$ krijg je de formules van de asymptoten van de grafiek als volgt.
Noemer = 0 en teller ≠ 0 geeft $e^x = 3$ oftewel $x = \ln(3)$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(3)$.
Omdat $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5\,e^x + 4}{2\,e^x - 6} = \dfrac{5 \cdot 0 + 4}{2 \cdot 0 - 6} = -\frac{2}{3}$, is voor $x \to -\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = -\frac{2}{3}$.

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5\,e^x + 4}{2\,e^x - 6} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 + \frac{4}{e^x}}{2 - \frac{6}{e^x}} = \dfrac{5 + 0}{2 - 0} = 2\frac{1}{2}$, is voor $x \to \infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.

Limieten bij logaritmische functies

Voor $0 < g < 1$ geldt: als $x \downarrow 0$ dan ${}^g\log(x) \to \infty$
en als $x \to \infty$ dan ${}^g\log(x) \to -\infty$.
Voor $g > 1$ geldt: als $x \downarrow 0$ dan ${}^g\log(x) \to -\infty$
en als $x \to \infty$ dan ${}^g\log(x) \to \infty$.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6}$ krijg je

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{5 + \frac{4}{\ln(x)}}{2 - \frac{6}{\ln(x)}} = \frac{5 + 0}{2 - 0} = 2\frac{1}{2}$$

en ook $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = 2\frac{1}{2}$.

Dus voor $x \downarrow 0$ nadert de grafiek het punt $(0, 2\frac{1}{2})$ en voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.
Voor de verticale asymptoot moet gelden noemer = 0 en teller ≠ 0.
Dit geeft $\ln(x) = 3$ oftewel $x = e^3$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = e^3$.

Eindopdracht Het wereldrecord op de marathon bij de vrouwen

In de tabel hiernaast zie je enkele gegevens over de ontwikkeling van het wereldrecord op de marathon bij de vrouwen. Hierin is v de gemiddelde snelheid in km/uur, afgerond op twee decimalen.

WERELDRECORDS MARATHON VROUWEN			
jaar	atleet	tijd	v
1963	Merry Lepper	3:37:04	11,66
1967	Anni Pede-Erdkamp	3:07:26	13,51
1971	Adrienne Beames	2:46:30	15,21
1980	Grete Waitz	2:25:42	17,38
2003	Paula Redcliffe	2:15:25	18,70

In deze opdracht ga je modellen maken bij de gemiddelde snelheid v als functie van de tijd t bij de wereldrecords. Je onderzoekt daarbij formules van dezelfde vorm als in de beginopdracht, dus formules van de vorm

$v = a + b\ln(t)$ en $v = \dfrac{a}{1 + b\,e^{ct}}$. Neem hierbij t in jaren met $t = 0$ in 1960.

Je maakt daarbij gebruik van zogenaamde regressiemodellen op de GR.
Hiertoe voer je de vijf gegevens van de tabel in bij lijsten.
In lijst 1 zet je de t-waarden en in lijst 2 de v-waarden.
We lichten een en ander toe voor de TI, de Casio, de NW en de HP.

Je krijgt hierbij de formules $v = 8{,}50 + 2{,}79\ln(t)$ en $v = \dfrac{18{,}81}{1 + 0{,}88\,e^{-0{,}118t}}$.

TI Kies stat, BEWERKEN, 1: Bewerken en voer de gegevens in bij L1 en L2.
Kies stat, BEREKENEN, 9: LnReg en Berekenen.
Met de optie B: Logistisch krijg je de andere formule.

Casio Kies het menu Statistics en voer de gegeven in bij List 1 en List 2.
Kies CALC, REG en Log.
Met de optie Logistic krijg je de andere formule.

NW Kies de app Regressie en voer de gegevens in bij X1 en Y1.
Kies Grafiek, OK en bij Regressie Logaritmisch.
Met Logistisch krijg je de andere formule.

HP Kies Apps, var 2 statistieken en voer de gegevens in bij C1 en C2.
Kies Symb en kies bij Type 1: Logaritmisch.
Na het kiezen van Plot en Symb staat de formule bij Fit1.
Met Type 1: Logistiek krijg je de andere formule.

- Voer bovenstaande handelingen uit op je GR en controleer of je de genoemde formules krijgt.
- In de tabel aan het begin van deze opdracht is een keuze gemaakt uit de wereldrecords vanaf 1960.
  Zoek op internet meer wereldrecords, bereken de gemiddelde snelheden en maak hierbij met behulp van regressiemodellen op de GR formules.
  Trek enkele conclusies uit de formules die je zo vindt.

Diagnostische toets

13.1 Limieten en perforaties

1 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ **b** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6}$

2 Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

a $f_a(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 12}{2x + a}$ **b** $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 6}{2x + a}$

13.2 Sprongen en knikken in grafieken

3 Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f_p(x)$? Geef exacte antwoorden.

a $f_p(x) = \begin{cases} 3^{x-p} \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 8 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$ **b** $f_p(x) = \begin{cases} |px - 3| \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 3x \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

4 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (2x - 2) \cdot |x + p|$.

a Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft.

Voor de waarden van p waarvoor de grafiek van f_p een knik heeft, raakt de lijn k het linkerdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt en raakt de lijn l het rechterdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt.

b Neem $p = 4$ en bereken de hoek tussen k en l. Rond af op gehele graden.

c Bereken exact voor welke p de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

13.3 Asymptoten bij gebroken functies

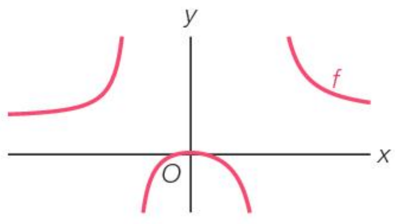
5 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(5x + 2)^2}{x^3 + 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|8 - 3x^3|}{2x^3 + 50x}$

6 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 12}$.

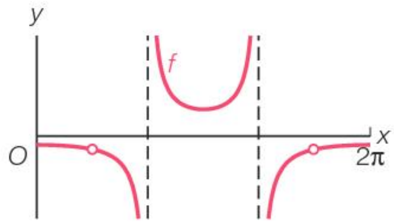
a Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.

b De horizontale asymptoot van de grafiek van f snijdt de grafiek in het punt A.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.



figuur 13.25

7 Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{2\cos(x) - 1}{8\sin^2(x) - 6}$.
De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten en twee perforaties.
Bereken exact de vergelijkingen van de asymptoten en de coördinaten van de perforaties.



figuur 13.26

8 Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

a $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x - 1}$

b $g(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 19}{x^2 - 4}$

9 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 - 9}$.
Het punt A is de perforatie van de grafiek van f. Het punt B is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f. De lijn k gaat door A en B.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt C van k met de y-as.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

10 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} (10 - 20 \cdot (\frac{9}{10})^x)$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 5}{e^x + 20}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x+2} + 1}{e^{2x} + 1}$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 \cdot 3^x + 2}{4 \cdot 2^x + 1}$

11 Voor elke p en q zijn gegeven de functies $f_{p,q}(x) = \dfrac{p\,e^x}{2\,e^x - qe}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van $f_{3,4}$ de formule op.

b Bereken voor welke p en q een van de snijpunten van de asymptoten van de grafiek van $f_{p,q}$ het punt $(3, 4)$ is.

12 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1 + {}^{16}\log(x)}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^3)}{1 - 3\ln(x)}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + \log(x)}{5 + \ln(x)}$

13 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 1}$.

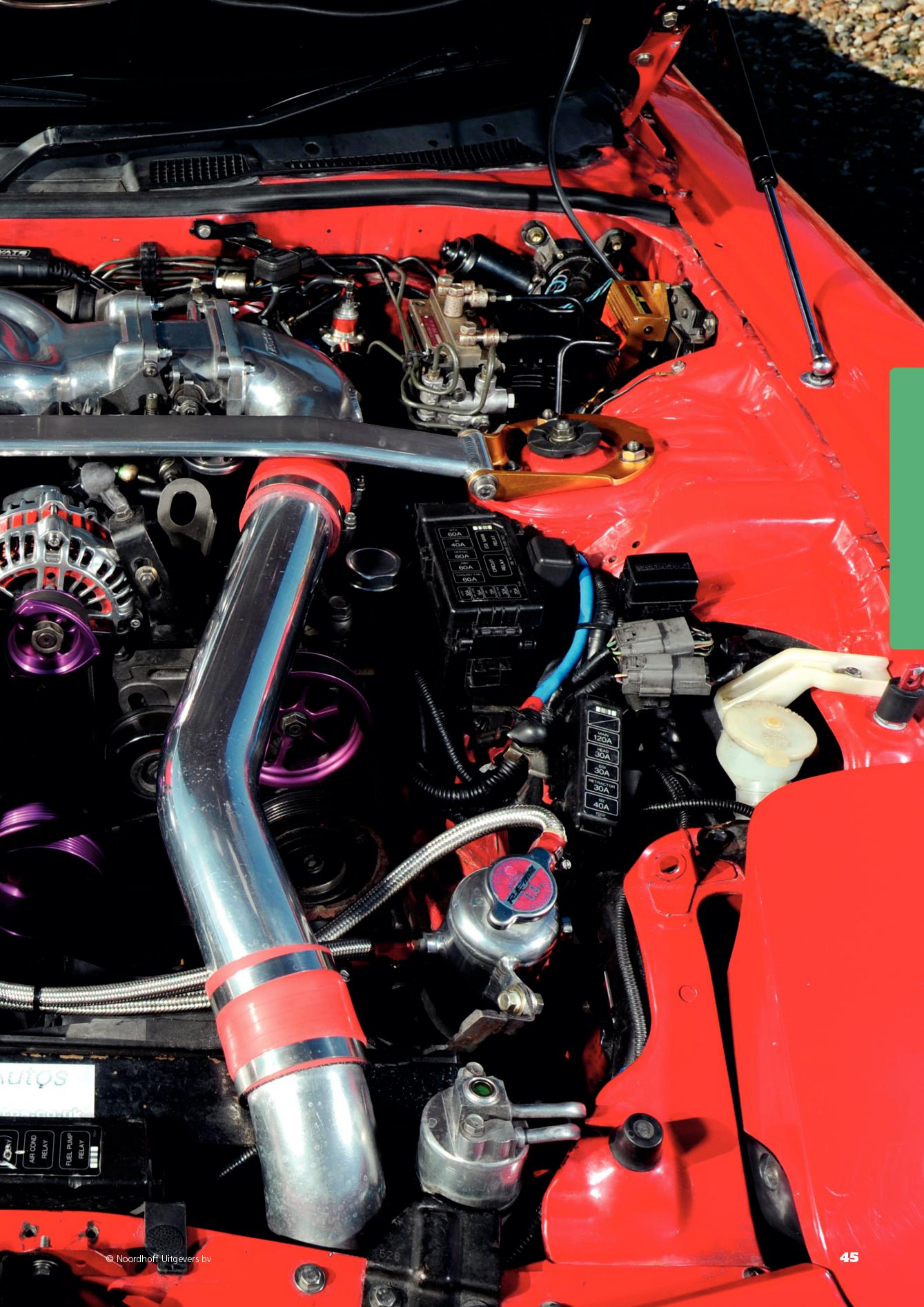
a Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

14 Meetkunde toepassen

Wat leer je?

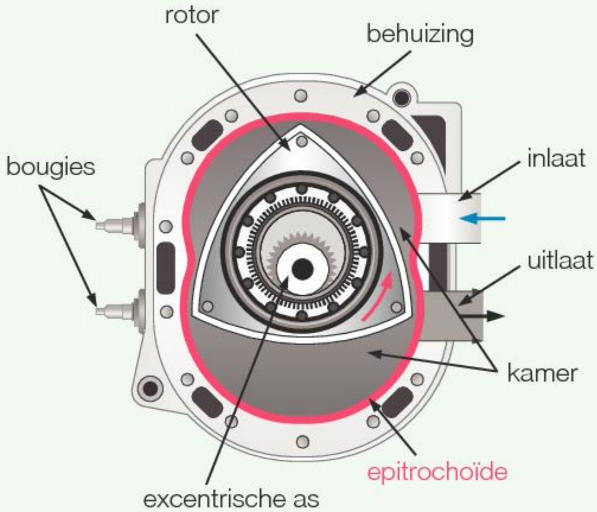
- Bij puntmassa's en homogene vormen de plaats van het zwaartepunt berekenen.
- Vergelijkingen van bissectrices en middelloodlijnen gebruiken bij meetkundige problemen.
- Problemen oplossen bij raaklijnen aan cirkels.
- De coördinaten van snijpunten van lijnen en cirkels berekenen.
- Vectoren gebruiken bij het berekenen van plaats, snelheid en versnelling bij bewegingen.


60A
40A
60A
60A
MAIN
120A
30A
30A
RETRACTOR
30A
40A
AIR COND
RELAY
FUEL PUMP
RELAY

Beginopdracht De wankelmotor

De wankelmotor, genoemd naar zijn ontwerper Felix Wankel (1902-1988), is een verbrandingsmotor die zonder cilinders en zuigers werkt. Bij de wankelmotor zit een rotor van bij benadering driehoekige vorm in een trommel en wordt in de drie open ruimten tussen de zijden van de driehoekige rotor en de trommel een mengsel van brandstof en lucht tot ontbranding gebracht, waardoor de rotor een draaiende beweging krijgt. Voordelen van de wankelmotor zijn compacte bouw, trillingsarme werking, en felle acceleratie. Nadelen zijn hoog brandstofverbruik en snelle slijtage. Tegenwoordig wordt de wankelmotor vooral gebruikt in elektrische auto's voor het opladen van de accu als deze bijna leeg is.
In de figuur is de wankelmotor schematisch weergegeven.

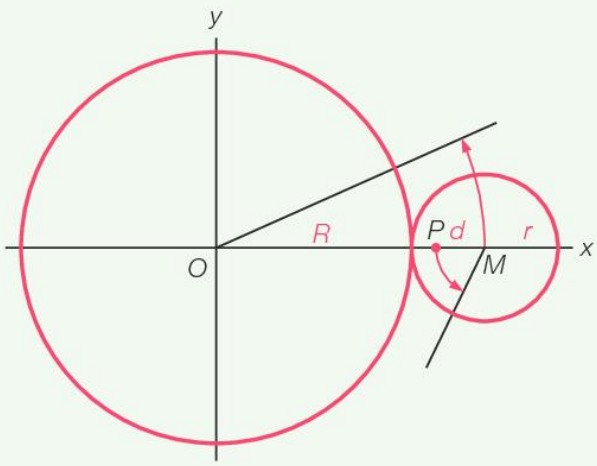
- Zoek op internet een filmpje waarin de werking van de wankelmotor te zien is.



De behuizing van de wankelmotor heeft de vorm van een zogenaamde epitrochoïde.
In deze opdracht leer je hoe een epitrochoïde kan ontstaan door een kleine cirkel over een grote cirkel te laten rollen en stel je er een parametervoorstelling van op.

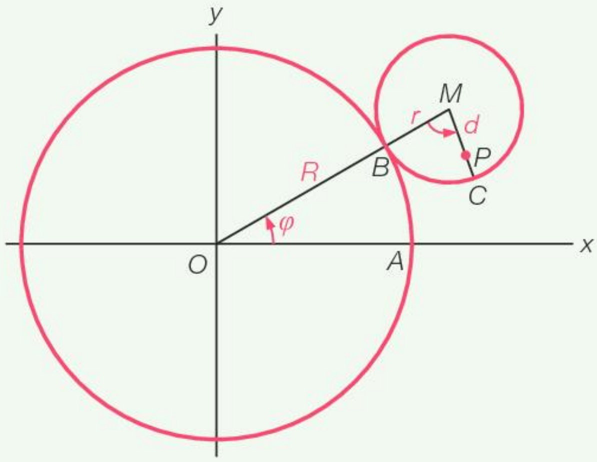
In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel een grote cirkel met middelpunt O en straal R en een kleine cirkel met middelpunt M en straal r getekend waarbij de cirkels elkaar raken.
Het punt P bevindt zich op afstand d van M. Zowel M als P liggen in de figuur op de x-as, met P links van M.
Als de kleine cirkel over de grote cirkel rolt, doorloopt P een kromme die epitrochoïde wordt genoemd. De vorm van de epitrochoïde hangt af van de waarden van R, r en d.
Op internet zijn animaties te vinden waarbij de kleine cirkel over de grote cirkel rolt en de baan van P wordt getekend.

- Bekijk een aantal van deze animaties.



In de figuur hiernaast is de kleine cirkel over de grote cirkel gerold. De hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OM is φ.

- Druk de coördinaten van M uit in R, r en φ.



In de figuur zijn de punten A, B en C getekend.

Er geldt $\angle BMC = \dfrac{R}{r}\varphi$.

- Bewijs dit. Gebruik dat boog BC = boog AB.

Er geldt $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -d\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\varphi\right) \\ -d\sin\left(\dfrac{R+r}{r}\varphi\right) \end{pmatrix}$.

- Bewijs dit. Gebruik een hulplijn door M evenwijdig met de x-as.

Een parametervoorstelling van de kromme die P doorloopt, is

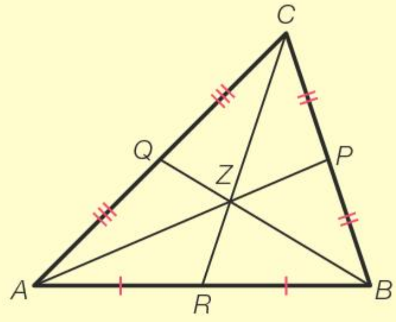
$$x_P = (R+r)\cos(\varphi) - d\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) \wedge y_P = (R+r)\sin(\varphi) - d\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right).$$

- Bewijs dit.
- Onderzoek met de GR wat de invloed is van R, r en d op de vorm van de epitrochoïde. Neem voor R en r gehele getallen.
- Onderzoek in welke verhouding R, r en d moeten worden gekozen om de vorm van de behuizing van de wankelmotor te krijgen.

Voorkennis Zwaartelijnen van een driehoek

Theorie A Zwaartelijn en zwaartepunt van driehoek

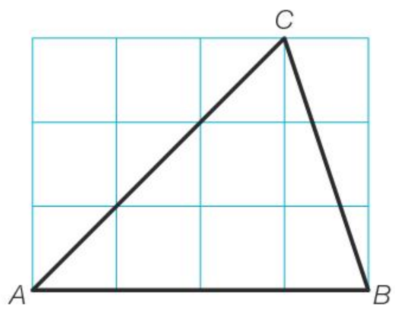
Een zwaartelijn van een driehoek is een lijn door een hoekpunt van de driehoek en het midden van de overstaande zijde.
De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zwaartepunt van de driehoek.
In figuur 14.1 zie je driehoek *ABC* met de zwaartelijnen *AP*, *BQ* en *CR* en het zwaartepunt *Z*.
Twee zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 2.
Zo geldt in figuur 14.1 dat $PZ : AZ = 1 : 2$.



figuur 14.1

1 Zie driehoek *ABC* in figuur 14.2.

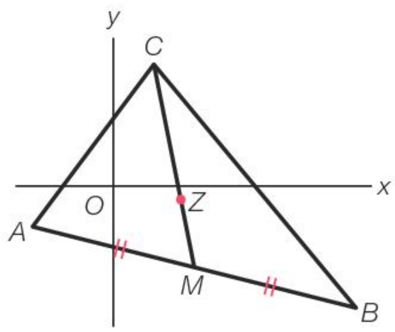
a Teken het zwaartepunt Z_1 van driehoek *ABC*.
b *AC* is een zwaartelijn van driehoek *ABD*.
Teken het zwaartepunt Z_2 van driehoek *ABD*.
c *C* is het zwaartepunt van driehoek *ABE*.
Teken driehoek *ABE*.



figuur 14.2

2 Gegeven is driehoek *ABC* in figuur 14.3 met $A(-2, -1)$, $B(6, -3)$ en $C(1, 3)$. *M* is het midden van *AB* en *Z* is het zwaartepunt van de driehoek.
In deze opgave gebruik je vectoren om de coördinaten van *Z* te berekenen. Er geldt $\vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

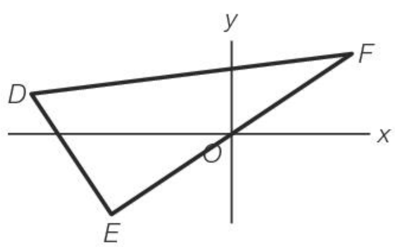
a Toon dit aan.
b Licht toe dat $\vec{z} = \vec{c} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$ en bereken de coördinaten van *Z*.



figuur 14.3

3 Gegeven is driehoek *DEF* in figuur 14.4 met $D(-5, 1)$, $E(-3, -2)$ en $F(3, 2)$.

a Bereken de coördinaten van het zwaartepunt *Z* van driehoek *DEF*.
b Het punt *F* is het zwaartepunt van driehoek *DEG*.
Bereken de coördinaten van *G*.



figuur 14.4

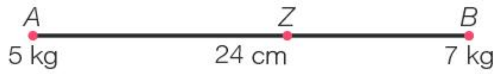
14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

01 Zie de figuur hiernaast. In het punt A bevindt zich een massa van m_1 kg en in punt B een massa van m_2 kg. Het zwaartepunt van het systeem is Z. De afstand van A tot Z is x cm en de afstand van B tot Z is y cm.

figuur 14.5

a Neem $m_1 < m_2$.
Wat denk je, is $x < y$ of is $x > y$?

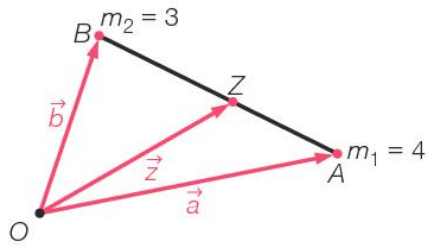
Er is ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten, dat wil zeggen dat $m_1 \cdot x = m_2 \cdot y$.
Is $m_1 = 5$, $m_2 = 7$ en $AB = 24$ cm, dan krijg je het systeem van figuur 14.6.
Om in figuur 14.6 de afstand van A tot Z te berekenen, stel je $AZ = x$.



figuur 14.6

b Bereken de afstand van A tot Z.

02 Zie figuur 14.7. In punt A ligt een massa van 4 en in punt B ligt een massa van 3. Het zwaartepunt van beide massa's samen ligt in punt Z.
Er geldt $4AZ = 3BZ$, dus $BZ = \frac{4}{3}AZ$.



figuur 14.7

a Licht dit toe.

Uit $BZ = \frac{4}{3}AZ$ en $AB = AZ + BZ$ volgt $AZ = \frac{3}{7}AB$.

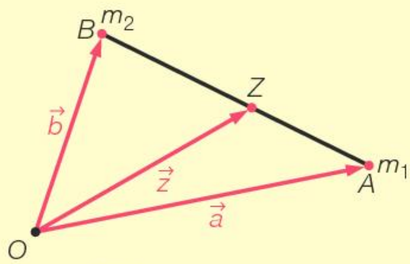
b Toon dit aan.

c Licht toe dat $\vec{z} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a})$ en herleid $\vec{z} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a})$ tot $\vec{z} = \frac{1}{7}(4\vec{a} + 3\vec{b})$.

Theorie A Zwaartepunten tekenen

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is.

In figuur 14.8 ligt in punt A een massa m_1 en in punt B een massa m_2. Het zwaartepunt van beide massa's samen ligt in punt Z.



figuur 14.8

Er geldt $m_1 \cdot AZ = m_2 \cdot BZ$, oftewel $BZ = \frac{m_1}{m_2}AZ$.

Uit $AB = AZ + BZ = AZ + \frac{m_1}{m_2}AZ = \frac{m_1 + m_2}{m_2}AZ$ volgt

$$AZ = \frac{m_2}{m_1 + m_2}AB.$$

Dus $\vec{z} = \vec{a} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\vec{z} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{z} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{z} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{m_1 + m_2 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

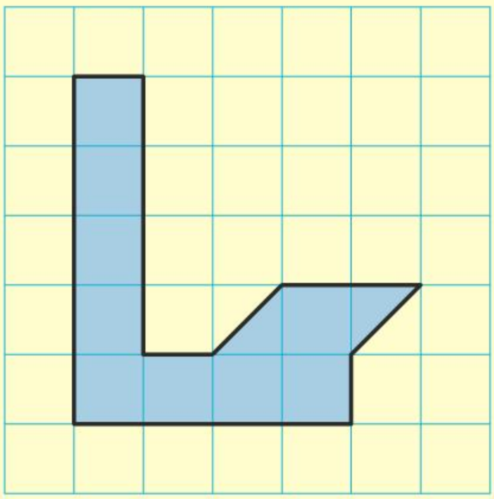
$$\vec{z} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b})$$

En zo geldt voor het zwaartepunt Z van de massa's m_1, m_2 en m_3 in respectievelijk de punten A, B en C dat $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c})$ met $M = m_1 + m_2 + m_3$. Je toont dit aan in opgave 3.

Voor het zwaartepunt Z van de massa's $m_1, m_2, ..., m_n$ in de punten $A_1, A_2, ..., A_n$ geldt $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + m_n \cdot \vec{a}_n)$ met $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$.

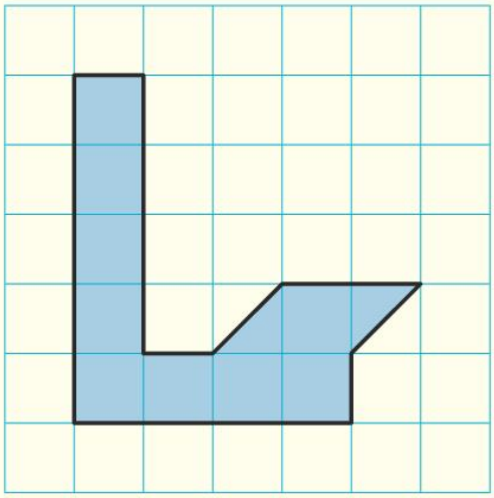
In de figuur hiernaast zie je een massieve homogene vorm. Dat betekent dat de massa over de hele vorm gelijkmatig is verdeeld.
Om het zwaartepunt van een massieve homogene vorm te tekenen, splits je de vorm op in een aantal stukken, teken je van elk stuk het zwaartepunt, en breng je een assenstelsel aan. Verder gebruik je dat je een massieve homogene vorm kunt opvatten als een puntmassa in het zwaartepunt.
In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de vorm van figuur 14.9 opgesplitst in twee rechthoeken en een parallellogram, waarbij wordt gebruikt dat het zwaartepunt van een massief homogeen parallellogram op het symmetriepunt ervan ligt.



figuur 14.9

Voorbeeld

Gegeven is de massieve homogene vorm in figuur 14.10.
Teken de plaats van het zwaartepunt.



figuur 14.10

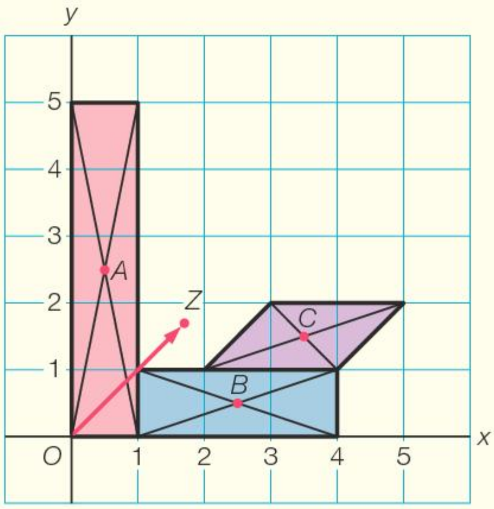
Uitwerking

Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 5.
B heeft massa 3.
C heeft massa 2.
De totale massa is $5 + 3 + 2 = 10$.

$$\vec{z} = \tfrac{1}{10}(5 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c})$$

$$= \tfrac{1}{10}\left(5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

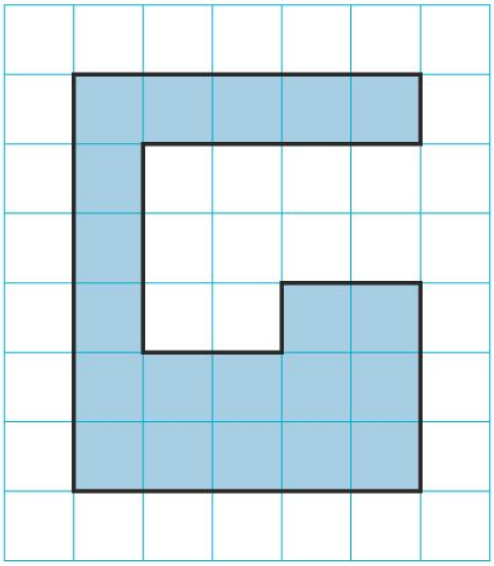
$$= \tfrac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 12\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 1{,}7 \end{pmatrix}$$



3

In de theorie is aangetoond dat voor het zwaartepunt van de massa's m_1 en m_2 in de punten A en B geldt $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b})$ met $M = m_1 + m_2$.
Gebruik dit om aan te tonen dat voor het zwaartepunt van de massa's m_1, m_2 en m_3 in de punten A, B en C geldt $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c})$ met $M = m_1 + m_2 + m_3$.

4 Teken de plaats van het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 14.11

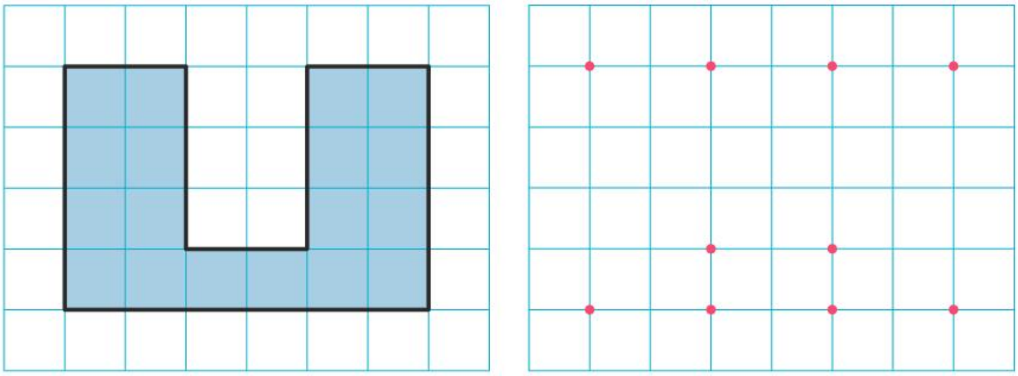


figuur 14.11

5 Teken de plaats van het zwaartepunt van

a de massieve homogene vorm in figuur 14.12a

b de tien even zware puntmassa's in figuur 14.12b.



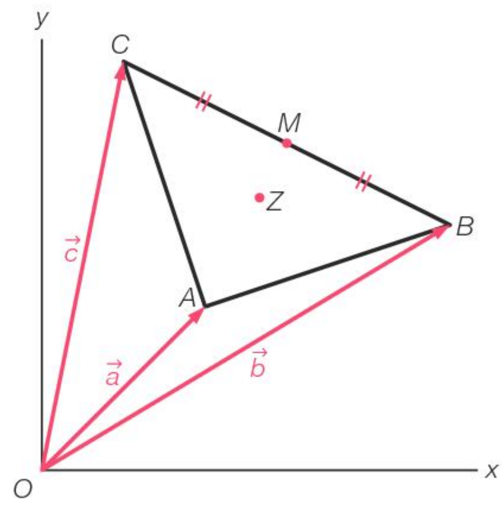
a **b**

figuur 14.12

6 In deze opgave toon je aan dat voor het zwaartepunt Z van een massieve homogene driehoek met de hoekpunten A, B en C geldt $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

In de figuur hiernaast zie je de massieve homogene driehoek ABC met M het midden van BC en het zwaartepunt Z. Verder zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ getekend.

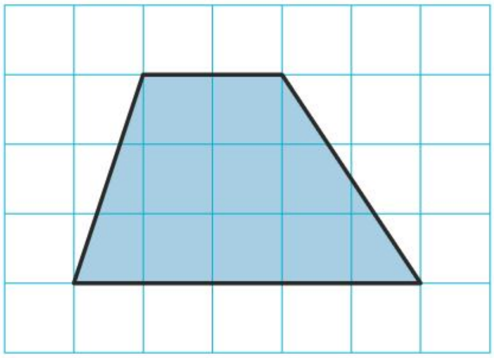
Licht toe dat $\vec{z} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a})$ en toon aan dat $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



figuur 14.13

7

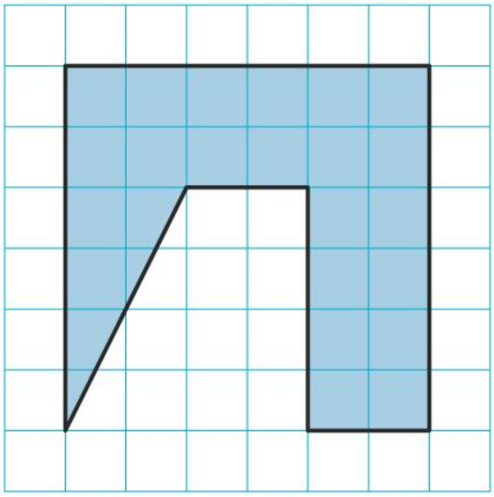
Teken van de massieve homogene vorm in figuur 14.14 de plaats van het zwaartepunt.



figuur 14.14

A8

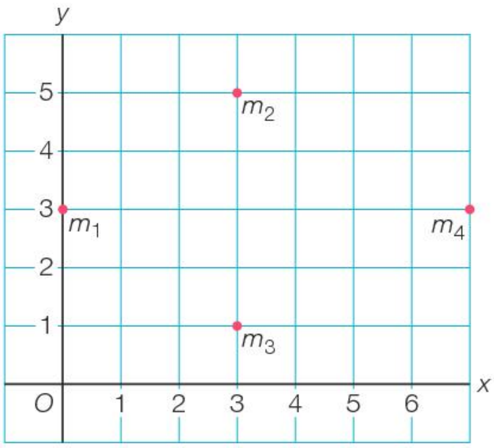
Teken de plaats van het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 14.15.



figuur 14.15

A9

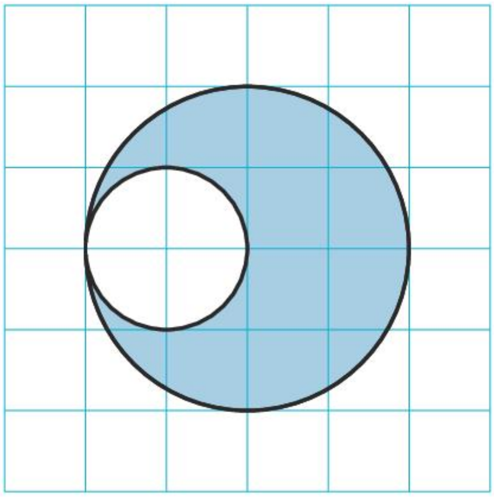
In figuur 14.16 zijn de puntmassa's m_1, m_2, m_3 en m_4 in een assenstelsel getekend. Er geldt $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 2$ en $m_4 = 3$.
Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze vier puntmassa's.



figuur 14.16

E10

Teken de plaats van het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 14.17.

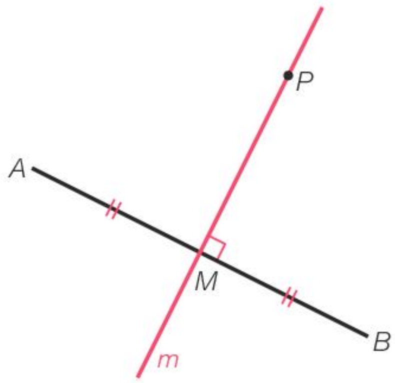


figuur 14.17

011

De *middelloodlijn* van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt.
In figuur 14.18 is lijnstuk AB getekend met midden M en middelloodlijn m. Het punt P is een willekeurig punt op m.

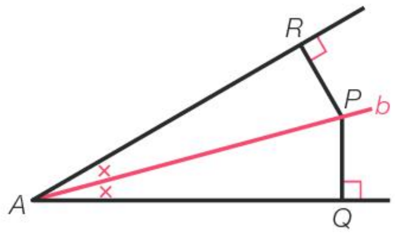
a Bewijs dat de afstand van P tot A gelijk is aan de afstand van P tot B.



figuur 14.18

De *bissectrice* van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt.
In figuur 14.19 is hoek A getekend met bissectrice b. Het punt P is een willekeurig punt op b.
De punten Q en R liggen op de benen van hoek A met $\angle AQP = \angle ARP = 90°$.

b Bewijs dat $PQ = PR$.



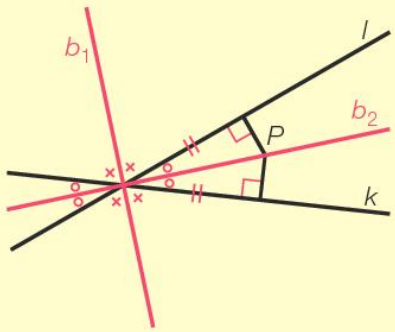
figuur 14.19

Theorie B Werken met middelloodlijnen en bissectrices

In opgave 11a heb je de volgende stelling bewezen.

Stelling middelloodlijn
Voor elk punt P op de middelloodlijn van een lijnstuk AB geldt: de afstand van P tot A is gelijk aan de afstand van P tot B.

In opgave 11b heb je bewezen dat elk punt op de bissectrice van een hoek even ver van het ene als van het andere been van de hoek ligt.
Bij twee snijdende lijnen vormen de bissectrices twee lijnen die loodrecht op elkaar staan, het **bissectricepaar**.
Zo zijn in de figuur hiernaast de lijnen b_1 en b_2 de bissectrices van de lijnen k en l. Voor elk punt P op b_1 of b_2 geldt $d(P, k) = d(P, l)$.



figuur 14.20

Stelling bissectricepaar
Voor elk punt P op de bissectrice (deellijn) van twee lijnen k en l geldt: de afstand van P tot lijn k is gelijk aan de afstand van P tot lijn l.

Wordt het bissectricepaar van de lijnen l: $3x + 4y = 24$ en m: $12x + 5y = 60$ gevormd door de lijnen n en p, dan gebruik je bovenstaande eigenschap om vergelijkingen van n en p op te stellen.
Stel $P(x, y)$ is een punt op n of p, dan geldt $d(P, l) = d(P, m)$.

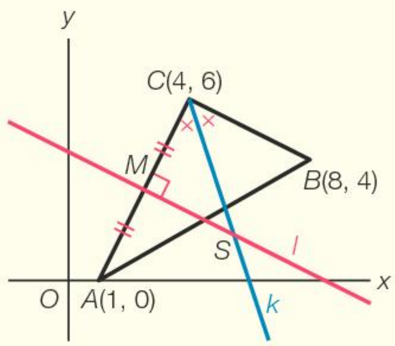
Je weet:

De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn k: $ax + by = c$ is $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Dus $d(P, l) = d(P, m)$ geeft $\dfrac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|12x + 5y - 60|}{\sqrt{169}}$
en hieruit volgt $7x - 9y = -4 \vee 99x + 77y = 612$.
Dus n: $7x - 9y = -4$ en p: $99x + 77y = 612$.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$.
De middelloodlijn l van zijde AC snijdt AC in het punt M.
De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt l in het punt S.
Bereken algebraïsch de coördinaten van S.



figuur 14.21

Uitwerking

$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

en AC: $2x - y = 2$.

$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

en BC: $x + 2y = 16$.

$P(x, y)$ op k en $d(P, AC) = d(P, BC)$ geeft

$$\frac{|2x - y - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}$$

$|2x - y - 2| = |x + 2y - 16|$

$2x - y - 2 = x + 2y - 16 \vee 2x - y - 2 = -x - 2y + 16$

$x - 3y = -14 \vee 3x + y = 18$

Uit de figuur volgt k: $3x + y = 18$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_l = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ geeft } l\text{: } x + 2y = c\\ M(\tfrac{1}{2}(1 + 4), \tfrac{1}{2}(0 + 6)) = M(2\tfrac{1}{2}, 3) \text{ op } l\end{array}\right\} l\text{: } x + 2y = 8\tfrac{1}{2}$$

k snijden met l.

$$\begin{cases}3x + y = 18\\ x + 2y = 8\tfrac{1}{2}\end{cases}\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases}6x + 2y = 36\\ x + 2y = 8\tfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\hline 5x = 27\tfrac{1}{2}\end{array} -$$

$$\left.\begin{array}{l}x = 5\tfrac{1}{2}\\ 3x + y = 18\end{array}\right\} 3 \cdot 5\tfrac{1}{2} + y = 18$$

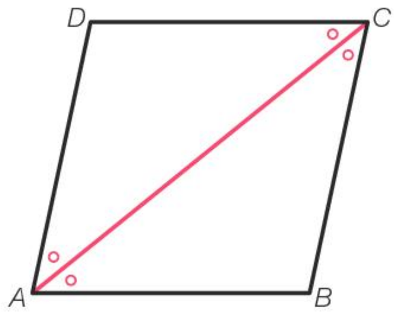
$$y = 1\tfrac{1}{2}$$

Dus $S(5\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2})$.

R12
a Zie de theorie twee bladzijden terug.
Bewijs dat b_1 en b_2 in figuur 14.20 loodrecht op elkaar staan.
b Zie de theorie op de vorige bladzijde.
Toon aan dat uit $\frac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 60|}{\sqrt{169}}$ volgt
$7x - 9y = -4 \vee 99x + 77y = 612$.
c Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Licht toe dat uit de figuur volgt dat $3x + y = 18$ een vergelijking van k is, en niet $x - 3y = -14$.

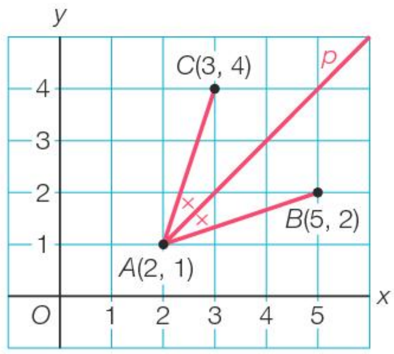
13
In het voorbeeld is een vergelijking van de bissectrice k van hoek $\angle ACB$ gevonden door uit te gaan van een punt $P(x, y)$ op k en te gebruiken dat $d(P, AC) = d(P, BC)$.
In deze opgave leer je een andere manier om een vergelijking van een bissectrice van een hoek op te stellen.

Een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden.
In figuur 14.22 zie je de ruit $ABCD$ met de diagonaal AC.
AC is de bissectrice van $\angle A$.
a Uit welke eigenschap van een ruit volgt dit?



figuur 14.22

Gegeven zijn de punten $A(2, 1)$, $B(5, 2)$ en $C(3, 4)$ en de bissectrice p van $\angle BAC$. Zie figuur 14.23.
Er geldt $\vec{r}_p = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b Licht dit toe en stel een vergelijking op van p.



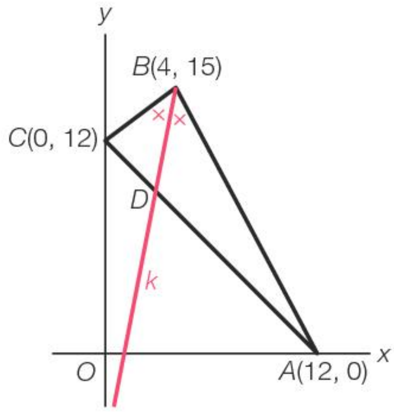
figuur 14.23

Gegeven zijn de punten $K(0, 2)$, $L(3, 6)$ en $M(8, -6)$ en de bissectrice q van $\angle KLM$.
q is de bissectrice van de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{LK}$ en $\overrightarrow{LM}$.
c Licht dit toe.

Er geldt $|\overrightarrow{LK}| = 5$ en $|\overrightarrow{LM}| = 13$.
d Toon dit aan.
e Thomas beweert dat $\vec{r}_q = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LM}$, maar Nesrin beweert dat $\vec{r}_q = 13 \cdot \overrightarrow{LK} + 5 \cdot \overrightarrow{LM}$.
Licht toe wie van de twee gelijk heeft, en stel een vergelijking op van q.

14
Gegeven zijn de lijnen k: $3x - 4y = 12$ en l: $5x + 12y = 48$.
Het bissectricepaar van k en l wordt gevormd door de lijnen m en n.
Lijn m snijdt de y-as in het punt A en lijn n snijdt de y-as in het punt B.
Bereken de afstand tussen A en B.

15 Gegeven is driehoek ABC met $A(12, 0)$, $B(4, 15)$ en $C(0, 12)$. De bissectrice k van hoek B snijdt de zijde AC in het punt D. Zie figuur 14.24.
Bereken exact de coördinaten van D.

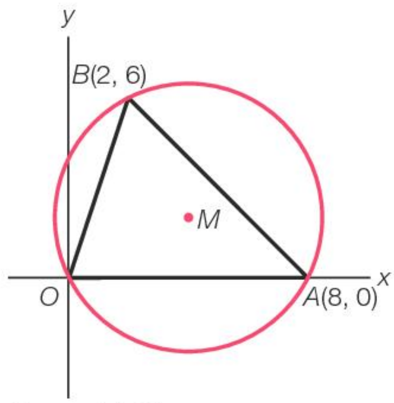


figuur 14.24

16 Het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.
Gegeven is driehoek OAB met $A(8, 0)$ en $B(2, 6)$.

a Bereken de coördinaten van het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek OAB.
b Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van driehoek OAB.

> De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r heeft vergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

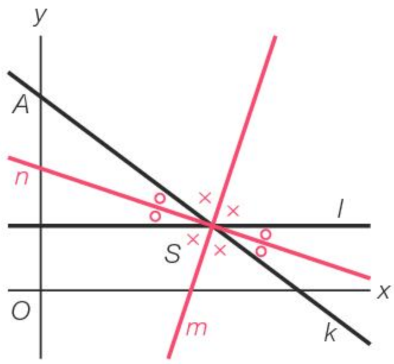


figuur 14.25

A17 Gegeven zijn de punten $A(3, 0)$, $B(7, 4)$, $C(5, 6)$ en $D(1, 4)$.
Onderzoek met een berekening of de punten A, B, C en D op één cirkel liggen.

18 Gegeven zijn de lijnen k: $3x + 4y = 12$ en l: $y = 1$.
Lijn k snijdt de y-as in het punt A en l in het punt S.
De lijnen m en n vormen het bissectricepaar van k en l.
Zie de figuur hiernaast. P is een punt op m.
In deze opgave ga je de coördinaten van P berekenen in het geval driehoek APS een rechthoekige driehoek is.
Er geldt $A(0, 3)$ en $S(2\frac{2}{3}, 1)$.

a Toon dit aan.



figuur 14.26

Een vergelijking van m is $y = 3x - 7$.

b Toon dit aan.

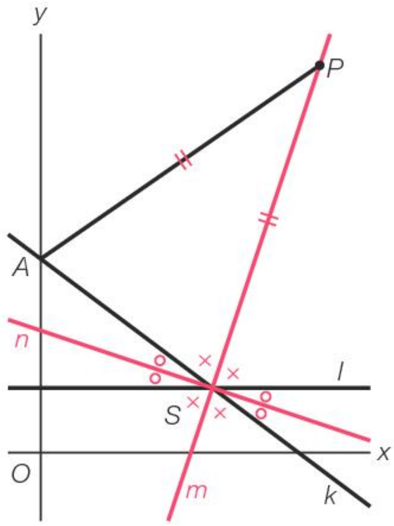
Stel je $P(p, 3p - 7)$, dan is $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix}$.

c Licht dit toe.
d Gebruik $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP}$ om p te berekenen in het geval $\angle SAP = 90°$ en geef de coördinaten van P.
e Bereken de coördinaten van P in het geval $\angle APS = 90°$.

A19 Zie opgave 18.

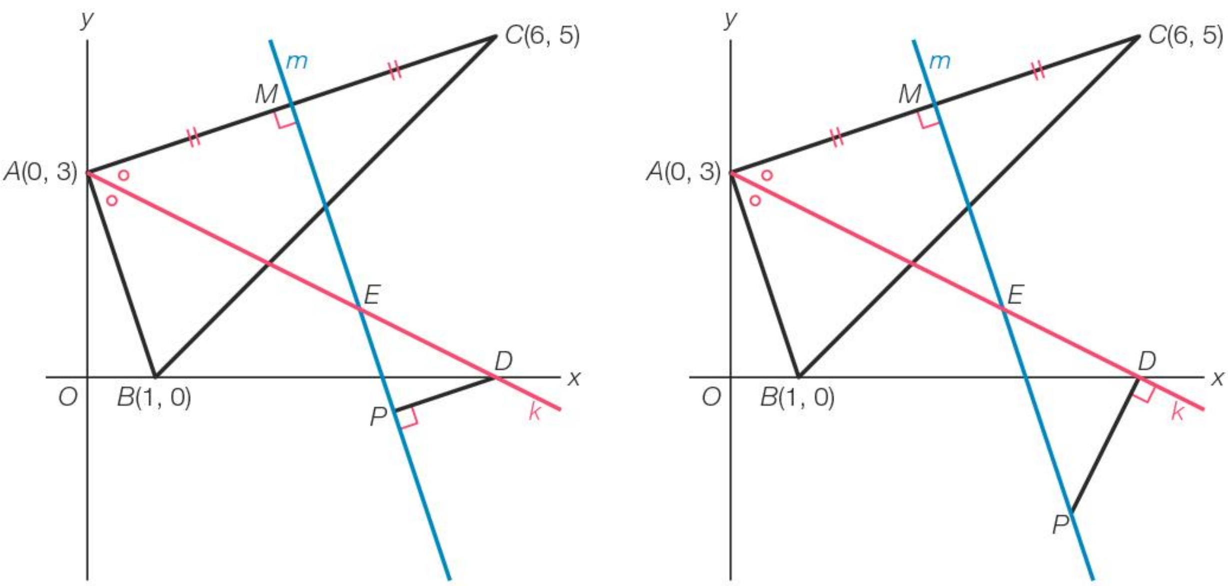
a Bereken de coördinaten van P in het geval driehoek APS een gelijkbenige driehoek is met $AP = SP$, zoals in de figuur hiernaast.

b Op n liggen twee punten Q waarvoor geldt dat driehoek AQS een rechthoekige driehoek is. Bereken van deze punten Q de coördinaten.



figuur 14.27

A20 Gegeven is driehoek ABC met $A(0, 3)$, $B(1, 0)$ en $C(6, 5)$.
De bissectrice k van hoek A snijdt de x-as in het punt D.
De middelloodlijn m van zijde AC snijdt AC in het punt M en k in het punt E.
Het punt P ligt op m zodanig dat driehoek DEP een rechthoekige driehoek is. In figuur 14.28 zie je beide mogelijkheden.

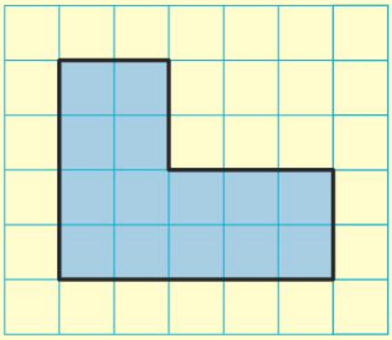


figuur 14.28

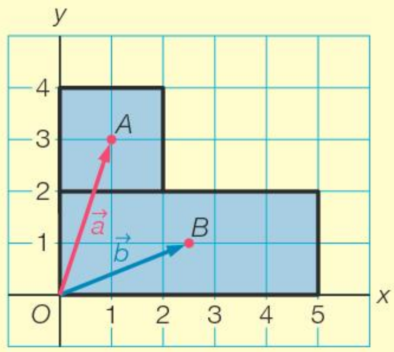
Onderzoek met exacte berekeningen of in beide gevallen geldt dat driehoek DEP een gelijkbenige driehoek is.

Terugblik

Vectoren en zwaartepunten



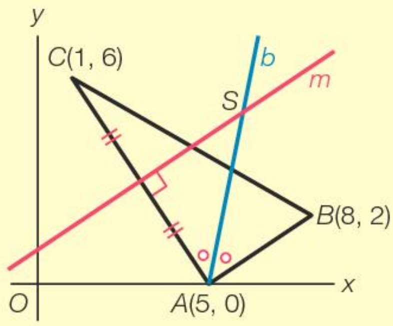
Voor het zwaartepunt Z van de massa's m_1 en m_2 in de punten A en B geldt $\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b})$ met $M = m_1 + m_2$. Voor drie en meer massa's geldt een soortgelijke eigenschap.
In de bovenste figuur hiernaast zie je een massieve homogene vorm.
Neem je een assenstelsel zoals in de onderste figuur hiernaast, dan zijn de coördinaten van het zwaartepunt Z als volgt te berekenen.



Gebruik $m_1 = 4$, $m_2 = 10$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Je krijgt $\vec{z} = \frac{1}{14}\left(4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{29}{14} \\ \frac{22}{14} \end{pmatrix}$, dus $Z(2\frac{1}{14}, 1\frac{4}{7})$.

Werken met middelloodlijnen en bissectrices



Gegeven is driehoek ABC met $A(5, 0)$, $B(8, 2)$ en $C(1, 6)$ en het punt S dat even ver van AB als van AC en even ver van A als van C ligt.
Om de coördinaten van S te berekenen, bedenk je dat S het snijpunt is van de bissectrice b van hoek A en de middelloodlijn m van zijde AC.
Stel $P(x, y)$ is een punt op b, dan geldt $d(P, AB) = d(P, AC)$.

$\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en AB: $2x - 3y = 10$.

$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en AC: $3x + 2y = 15$.

Met de afstandsformule krijg je dat $d(P, AB) = d(P, AC)$ geeft

$\frac{|2x - 3y - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x + 2y - 15|}{\sqrt{13}}$ en hieruit volgt
$x + 5y = 5 \vee 5x - y = 25$.

Afstandsformule
$P(x_P, y_P)$ en k: $ax + by = c$
$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Uit de figuur volgt dat $5x - y = 25$ een vergelijking van b is.

$\vec{n}_m = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus m: $2x - 3y = c$.

m door het midden $(3, 3)$ van AC geeft m: $2x - 3y = -3$.

b snijden met m geeft het stelsel $\begin{cases} 5x - y = 25 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

Oplossen geeft $(x, y) = (6, 5)$, dus $S(6, 5)$.

14.2 Cirkels en raaklijnen

021 Bij het oplossen van raaklijnproblemen bij cirkels gebruik je de volgende eigenschappen.

1. Een raaklijn van een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.
2. De afstand van het middelpunt van een cirkel tot een raaklijn aan de cirkel is gelijk aan de lengte van de straal van de cirkel.

Welke van deze eigenschappen gebruik je bij elk van de volgende raaklijnproblemen? Maak zo nodig een schets.

a Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven zijn een cirkel en een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.

b Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven zijn het middelpunt van c en een lijn waaraan c raakt.

c Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven zijn een cirkel waaraan k raakt en de richting van k.

d Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven zijn een cirkel waaraan k raakt en een punt buiten de cirkel op k.

Theorie A Raaklijnproblemen bij cirkels

In de figuur hiernaast zijn de lijnen k: $x - y = -5$, l: $7x + y = 13$ en m: $x - y = -1$ getekend en de cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten M_1 en M_2 op m liggen en die k en l raken.
Om de coördinaten van M_1 en M_2 te berekenen, ga je uit van een punt $M(p, p + 1)$ op m.
Uit eigenschap 2 van opgave 21 volgt dan dat voor M geldt $d(M, k) = d(M, l)$.

Zo krijg je $\dfrac{|p - (p + 1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|7p + p + 1 - 13|}{\sqrt{7^2 + 1^2}}$

$$\frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{|8p - 12|}{\sqrt{50}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{|8p - 12|}{5\sqrt{2}}$$

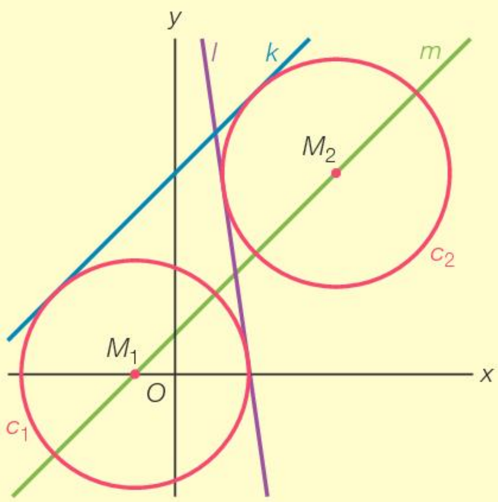
$$|8p - 12| = 20$$

$$8p - 12 = 20 \vee 8p - 12 = -20$$

$$8p = 32 \vee 8p = -8$$

$$p = 4 \vee p = -1$$

Dus $M_1(-1, 0)$ en $M_2(4, 5)$.

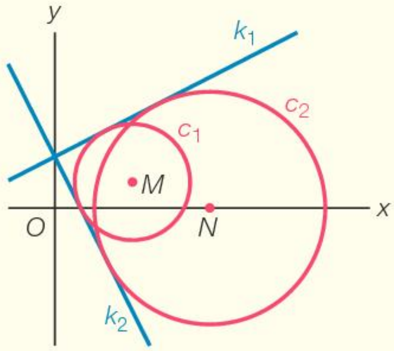


figuur 14.29

In het voorbeeld worden vergelijkingen opgesteld van de gemeenschappelijke raaklijnen van twee gegeven snijdende cirkels.

Voorbeeld

Gegeven zijn de snijdende cirkels
c_1: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ en c_2: $(x - 6)^2 + y^2 = 20$.
De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van c_1 en c_2. Zie de figuur hiernaast.
Stel van k_1 en van k_2 algebraïsch een vergelijking op.



figuur 14.30

Uitwerking

c_1 heeft middelpunt $M(3, 1)$ en straal $\sqrt{5}$.
c_2 heeft middelpunt $N(6, 0)$ en straal $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Stel k: $y = ax + b$ oftewel k: $ax - y + b = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|3a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$, dus $|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$.

$d(N, k) = 2\sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|6a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{5}$, dus $|6a + b| = 2\sqrt{5a^2 + 5}$.

Hieruit volgt $2|3a - 1 + b| = |6a + b|$

$6a - 2 + 2b = 6a + b \vee 6a - 2 + 2b = -6a - b$

$b = 2 \vee 3b = -12a + 2$

$b = 2 \vee b = -4a + \frac{2}{3}$

$b = 2$ invullen in $|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft $|3a + 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$

$4a^2 + 6a - 4 = 0$

$2a^2 + 3a - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$

$a = \dfrac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \dfrac{-3 - 5}{4} = -2$

Dus k_1: $y = \frac{1}{2}x + 2$ en k_2: $y = -2x + 2$.
Hiermee zijn de twee lijnen gevonden, dus $b = -4a + \frac{2}{3}$ voldoet niet.

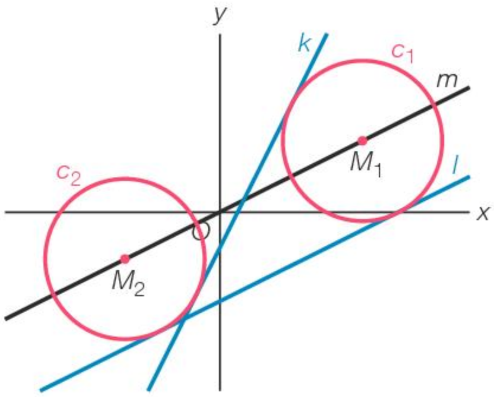
R22 Zie de theorie op de vorige bladzijde.
Stel van c_1 en van c_2 een vergelijking op.

R23 Zie het voorbeeld.

a Je kunt ook met een berekening aantonen dat $b = -4a + \frac{2}{3}$ niet voldoet.
Doe dit.

b De lijn is k: $y = ax + b$ gesteld. Hiermee sluit je één mogelijke richting van k uit.
Welke richting is dit?

24 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - y = 1$, l: $x - 2y = 5$ en m: $x - 2y = 0$. Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten op m liggen en die k en l raken. Zie de figuur hiernaast.
Stel van c_1 en van c_2 algebraïsch een vergelijking op.



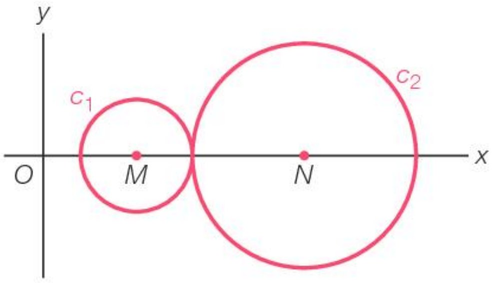
figuur 14.31

R25 Zie opgave 24.
Je kunt de coördinaten van de middelpunten M_1 en M_2 van de cirkels c_1 en c_2 ook vinden door de bissectrices van de lijnen k en l te snijden met de lijn m.
Licht dit toe.

26 Gegeven zijn de cirkels c_1: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ en c_2: $(x - 14)^2 + y^2 = 36$. Zie figuur 14.32.
De cirkels raken elkaar.

a Toon dit aan.

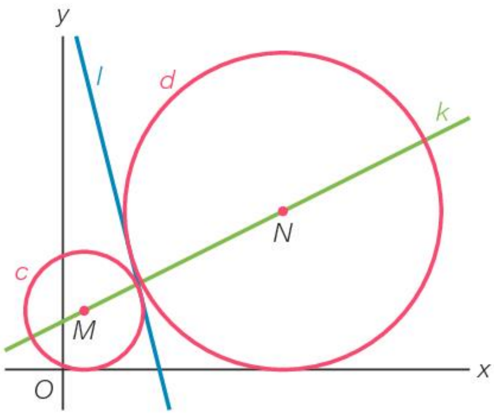
b De cirkels hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.
Stel op algebraïsche wijze van elk van deze lijnen een vergelijking op.



figuur 14.32

27 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - y = 0$, l: $x - 3y = -8$ en m: $x - 2y = -4$. De middelpunten van de cirkels c_1 en c_2 liggen op m, en c_1 en c_2 raken k en l.
Stel van c_1 en van c_2 algebraïsch een vergelijking op.

28 Gegeven zijn de lijn k met parametervoorstelling $x = 2 + 2t \wedge y = 2 + t$ en de lijn l met vergelijking $y = -4x + 8$.
Van de cirkels c en d liggen de middelpunten M en N op k, en c en d raken zowel aan de x-as als aan lijn l. Zie de figuur hiernaast.
Bereken de afstand tussen M en N. Rond het antwoord af op twee decimalen.

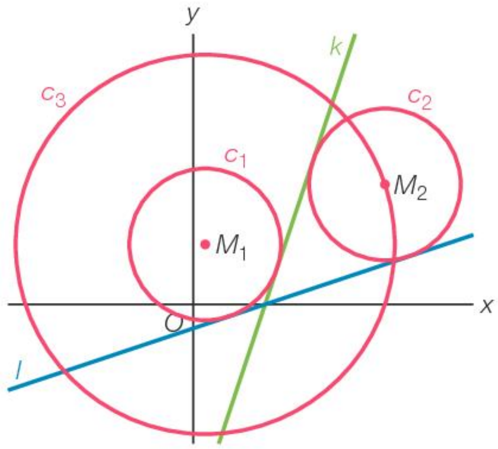


figuur 14.33

A29 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - y = 9$ en l: $x - 3y = 3$.
In de figuur hiernaast zie je de cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 die beide straal $\sqrt{10}$ hebben en zowel k als l raken.
Uit de gegevens volgt dat $M_1(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ en $M_2(8, 5)$.

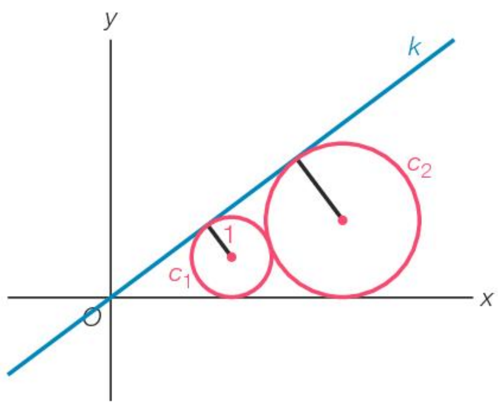
a Toon dit aan.

b Cirkel c_3 heeft middelpunt M_1 en gaat door M_2. Stel algebraïsch vergelijkingen op van de gemeenschappelijke raaklijnen van c_2 en c_3.



figuur 14.34

E30 Gegeven is de lijn k: $3x - 4y = 0$.
Cirkel c_1 heeft straal 1 en raakt de x-as en lijn k zoals in figuur 14.35. Cirkel c_2 raakt de x-as, lijn k en c_1 zoals in figuur 14.35.
Bereken exact de straal van c_2.

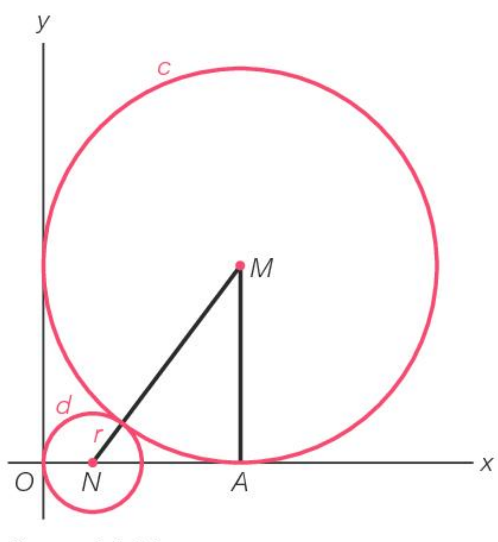


figuur 14.35

O31 De cirkel c met straal 10 raakt de positieve x-as en de positieve y-as. Het middelpunt van c is M en het raakpunt van c met de x-as is A.
Van de cirkel d ligt het middelpunt N op de x-as. Deze cirkel raakt zowel de y-as als c.
We vragen ons af wat de straal van d is en wat een vergelijking van d is. Stel daartoe de straal gelijk aan r.
Uit bovenstaande volgt de vergelijking
$(10 - r)^2 + 10^2 = (r + 10)^2$.

a Licht dit toe.

b Bereken r en geef een vergelijking van d.



figuur 14.36

Theorie B Vergelijkingen bij rakende cirkels

In de figuur hiernaast zie je nogmaals de cirkels c en d van opgave 31. Verder is de cirkel e getekend. Het middelpunt P van e ligt op de x-as en e raakt c en d.
De straal van c is 10, de straal van d is $2\frac{1}{2}$ en de straal van e is r gesteld. Hieruit volgt $AM = 10$, $PM = r + 10$ en $AP = 10 - 5 - r = 5 - r$.
Omdat c de x-as raakt in A is $\angle OAM = 90°$.
Met de stelling van Pythagoras in driehoek AMP krijg je

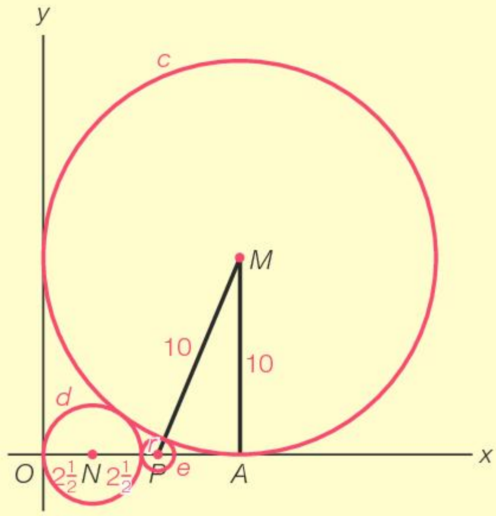
$(5 - r)^2 + 10^2 = (r + 10)^2$

$25 - 10r + r^2 + 100 = r^2 + 20r + 100$

$-30r = -25$

$r = \frac{5}{6}$

Dus $x_P = 5\frac{5}{6}$ en e: $(x - 5\frac{5}{6})^2 + y^2 = \frac{25}{36}$.

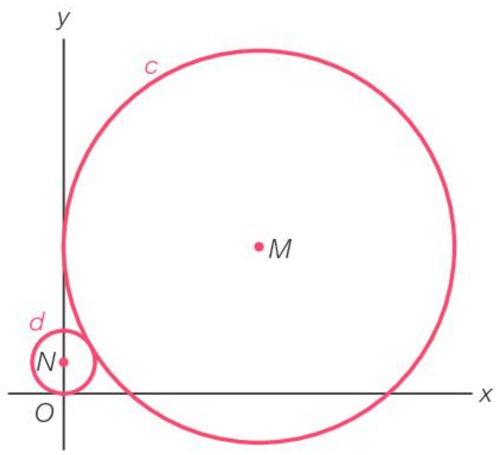


figuur 14.37

32 De cirkel c heeft middelpunt $M(8, 6)$ en straal 8. De cirkel d met middelpunt N raakt c en raakt de x-as in het punt $O(0, 0)$, zoals in de figuur hiernaast.

a Stel een vergelijking op van d.

b Er is nog een cirkel die zowel c als de x-as in $O(0, 0)$ raakt.
Stel van deze cirkel een vergelijking op.

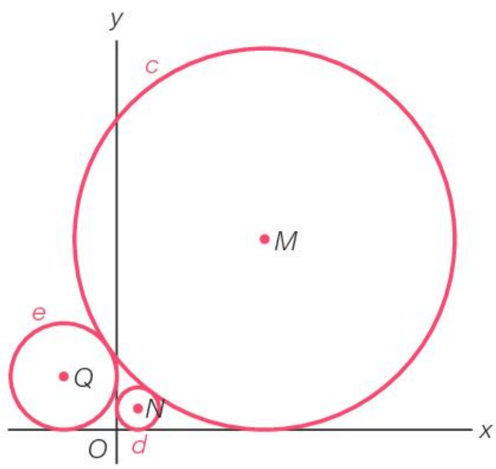


figuur 14.38

33 De cirkel c met middelpunt $M(7, 9)$ raakt de x-as. De cirkel d raakt de positieve x-as, de positieve y-as en c.
In figuur 14.39 zie je de cirkels c en d, met N het middelpunt van d.

a Stel van d een vergelijking op.

b In de figuur is ook de cirkel e getekend met middelpunt Q. Deze cirkel raakt de negatieve x-as, de positieve y-as en c.
Bereken exact de straal van e.



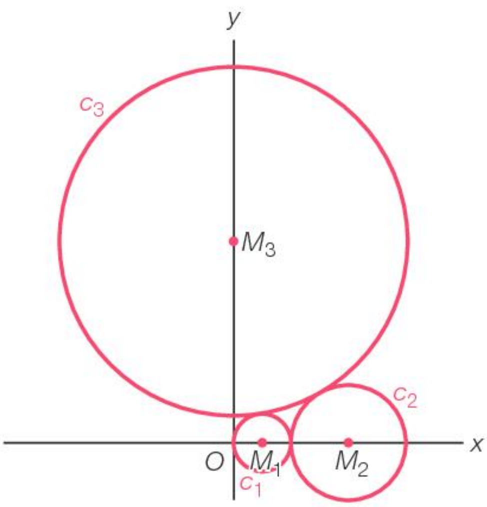
figuur 14.39

34

Gegeven zijn de cirkels c_1 met middelpunt $M_1(3, 0)$ en c_2 met middelpunt $M_2(12, 0)$.
Cirkel c_1 raakt de y-as in het punt $O(0, 0)$. Verder raken c_1 en c_2 elkaar.
Het middelpunt M_3 van cirkel c_3 ligt op de positieve y-as en c_3 raakt c_1 en c_2. Zie de figuur hiernaast.
Stel $M_3(0, p)$ en de straal van c_3 is r.
Dan geldt $p^2 + 9 = (r + 3)^2$ en $p^2 + 144 = (r + 6)^2$.

a Toon dit aan.

b Bereken exact de waarden van p en r.



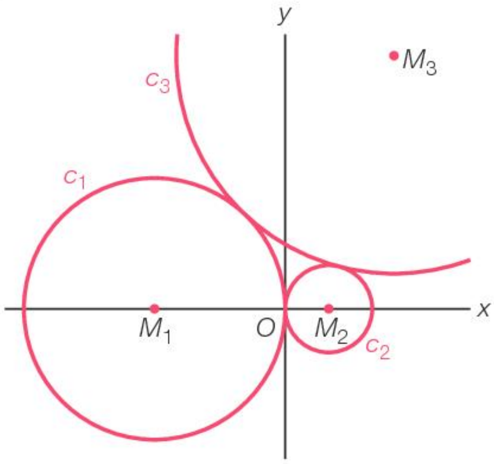
figuur 14.40

A35

Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt $M_1(-3, 0)$ en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(1, 0)$. De cirkels c_1 en c_2 raken de y-as in de oorsprong.
We bekijken in deze opgave cirkels c_3 met straal r en waarvan het middelpunt M_3 in het eerste kwadrant ligt.
Voor elke waarde van r is er een cirkel c_3 die c_1 en c_2 raakt.
In de figuur hiernaast zie je de situatie waarbij de straal van c_3 gelijk is aan 5.

a Bereken voor deze situatie $\angle M_1M_2M_3$ in graden. Rond af op één decimaal.

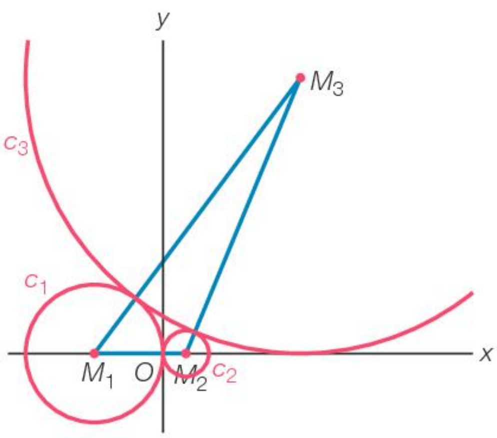
b De straal r kan groter zijn dan 5 en zelfs onbeperkt toenemen. Er zijn geen waarden van r waarbij $\angle M_1M_2M_3$ groter dan of gelijk is aan 120°.
Bewijs dit.



figuur 14.41

In de figuur hiernaast zie je de situatie waarbij c_3 de x-as raakt.

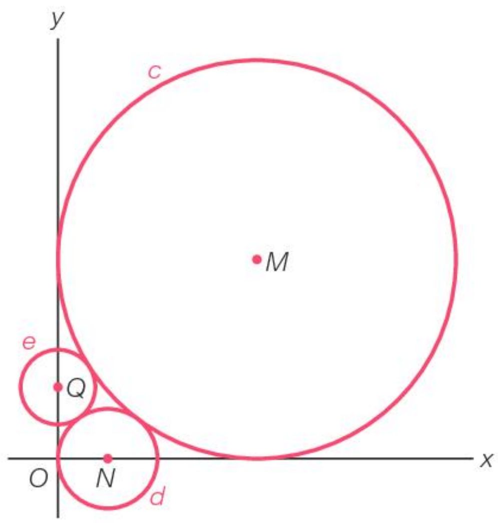
c Bereken exact voor deze situatie de coördinaten van M_3.



figuur 14.42

E36 *

Gegeven zijn de cirkels c, d en e zoals in de figuur hiernaast. De cirkel c met middelpunt M en straal 8 raakt de x-as en de y-as. De cirkel d met middelpunt N raakt c en raakt de y-as in de oorsprong. De cirkel e raakt c en d en het middelpunt Q van e ligt op de y-as.
Bereken exact de straal van e.



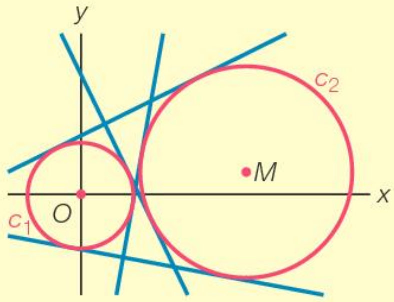
figuur 14.43

Terugblik

Cirkels en raaklijnen

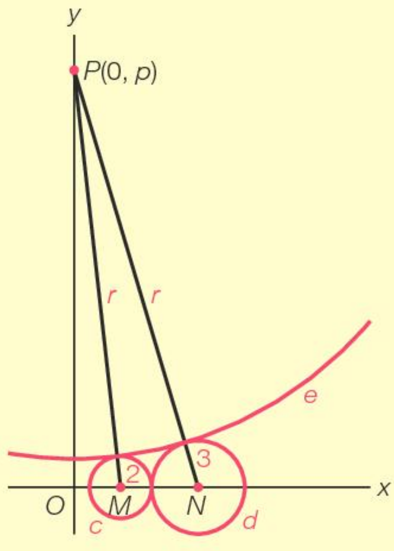
Bij het oplossen van raaklijnproblemen bij cirkels gebruik je

- een raaklijn van een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt
- de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een raaklijn aan de cirkel is gelijk aan de lengte van de straal van de cirkel.



De cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 5$ en c_2: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 20$ hebben vier gemeenschappelijke raaklijnen. Zie de figuur hiernaast.
Om vergelijkingen van deze lijnen op te stellen, ga je uit van k: $y = ax + b$ oftewel k: $ax - y + b = 0$.
$d(O, k) = r_1$ geeft $|b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ en
$d(M, k) = r_2$ geeft $|7a - 1 + b| = 2\sqrt{5a^2 + 5}$.
Hieruit volgt $|7a - 1 + b| = 2|b|$.
Je krijgt $b = 7a - 1 \vee b = -2\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$.
Deze uitdrukkingen van b substitueren in $|b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft
$a = -\frac{2}{11} \vee a = \frac{1}{2} \vee a = -2 \vee a = 5\frac{1}{2}$.
Zo krijg je de vergelijkingen k_1: $y = -\frac{2}{11}x - 2\frac{3}{11}$, k_2: $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$,
k_3: $y = -2x + 5$ en k_4: $y = 5\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$.

Vergelijkingen bij rakende cirkels



Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt $M(3, 0)$ en straal 2 en de cirkel d met middelpunt $N(8, 0)$ die c raakt.
Cirkel e raakt c en d en het middelpunt P van e ligt op de positieve y-as.
Om een vergelijking van e op te stellen, bedenk je eerst dat uit $d(c, d) = 0$ volgt $r_d = d(M, N) - r_c = 5 - 2 = 3$.
Vervolgens stel je $P(0, p)$ en de straal van e gelijk aan r_e.
Met de stelling van Pythagoras krijg je nu twee vergelijkingen.
In $\triangle OMP$: $3^2 + p^2 = (2 + r_e)^2$ oftewel $p^2 = r_e^2 + 4r_e - 5$.
In $\triangle ONP$: $8^2 + p^2 = (3 + r_e)^2$ oftewel $p^2 = r_e^2 + 6r_e - 55$.
$r_e^2 + 4r_e - 5 = r_e^2 + 6r_e - 55$ geeft $r_e = 25$
$p^2 = r_e^2 + 4r_e - 5$ en $r_e = 25$ geeft $p^2 = 720$, dus $p = 12\sqrt{5}$.
Een vergelijking van e is dus $x^2 + (y - 12\sqrt{5})^2 = 625$.

14.3 Cirkels en snijpunten

037 Gegeven zijn de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$ met middelpunt M en straal r en de lijn k: $y = -x - 1$.

a Substitueer $y = -x - 1$ in de cirkelvergelijking, herleid de zo ontstane vergelijking tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ en bereken de discriminant. Hoe volgt hieruit dat k raakt aan c?

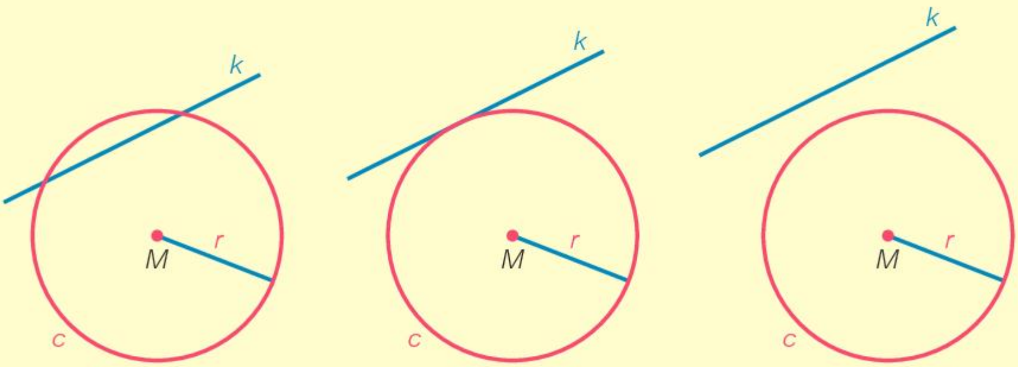
b Bereken $d(M, k)$. Hoe volgt hieruit dat k raakt aan c?

Theorie A De ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel

Voor de ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel zijn er drie mogelijkheden.

1 De lijn snijdt de cirkel in twee punten.
2 De lijn raakt de cirkel.
3 De lijn en cirkel hebben geen punten gemeenschappelijk.

In de figuur hieronder zijn deze situaties in beeld gebracht. Hierbij is D de discriminant van de tweedegraadsvergelijking die ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking.



$D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$

$d(M, k) < r$ | $d(M, k) = r$ | $d(M, k) > r$

Om te bewijzen dat de lijn k: $2x - y = 3$ de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ in twee punten snijdt, kun je als volgt te werk gaan.
Maak y vrij bij $2x - y = 3$. Je krijgt $y = 2x - 3$.
Substitutie van $y = 2x - 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ geeft
$x^2 + (2x - 3)^2 - 4x + 2(2x - 3) - 20 = 0$
$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x + 4x - 6 - 20 = 0$
$5x^2 - 12x - 17 = 0$
$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -17 = 484$
$D > 0$, dus de lijn k snijdt de cirkel c in twee punten.

In het voorbeeld is de vergelijking van de cirkel gegeven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ en wordt $d(M, k) > r$ gebruikt in het geval de cirkel en een lijn geen punten gemeenschappelijk hebben.

Voorbeeld

Bereken voor welke waarden van q de lijn l: $4x - y = q$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel c: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$.

Uitwerking

Van c is het middelpunt $M(5, 1)$ en de straal $r = \sqrt{17}$.

$d(M, l) = \dfrac{|4 \cdot 5 - 1 - q|}{\sqrt{17}}$

$d(M, l) > r$ geeft $\dfrac{|4 \cdot 5 - 1 - q|}{\sqrt{17}} > \sqrt{17}$

$|19 - q| > 17$

$19 - q > 17 \vee 19 - q < -17$

$-q > -2 \vee -q < -36$

$q < 2 \vee q > 36$

R38

a Zie de theorie op de vorige bladzijde.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn k: $2x - y = 3$ en de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

b Zie het voorbeeld.
Voor welke waarden van q snijdt de lijn l: $4x - y = q$ de cirkel c: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$ in twee punten?

39

Bewijs dat

a de lijn k: $y = x - 3$ de cirkel c_1: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ in twee punten snijdt

b de lijn l: $2x + y = 7$ de cirkel c_2: $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 18$ raakt

c de lijn m: $x - 3y + 3 = 0$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel c_3: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

40

Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van

a de lijn k: $x - y + 1 = 0$ en de cirkel c_1: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$

b de lijn l: $x = t + 1 \wedge y = 2t + 1$ en de cirkel c_2: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

41 Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de lijn en de cirkel. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a De lijn k: $2x - 3y + 4 = 0$ en de cirkel c_1: $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.

b De lijn l: $3x + 4y = 19$ en de cirkel c_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Bij opgave 41 staat niet dat het algebraïsch of exact moet, dus je mag de GR gebruiken.

42 Gegeven is de cirkel c: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

a Bereken voor welke a de lijn k: $y = ax + 1$ de cirkel c in twee punten snijdt.

b Bereken voor welke b de lijn l: $y = \frac{1}{2}x + b$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c.

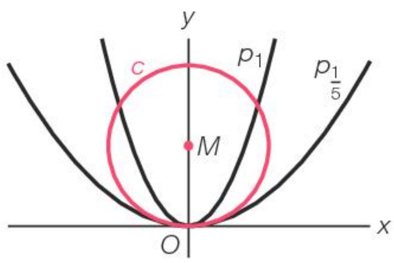
A43 Het lijnstuk AB met $A(-1, 3)$ en $B(7, -1)$ is een middellijn van de cirkel c.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de lijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en c.

b Bereken voor welke p de lijn k: $y = -2x + p$ de cirkel c raakt.

c Bereken voor welke q de lijn l: $y = qx - 5\frac{1}{2}$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c.

A44 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(0, 2)$ die door de oorsprong gaat. Verder zijn voor elke $a \neq 0$ de parabolen p_a: $y = ax^2$ gegeven.
Afhankelijk van de waarde van a hebben de parabool en de cirkel één punt of drie punten gemeenschappelijk. In de figuur hiernaast zie je de situaties voor $a = 1$ en $a = \frac{1}{5}$.
Bereken exact voor welke waarden van a de parabool en de cirkel drie punten gemeenschappelijke hebben.

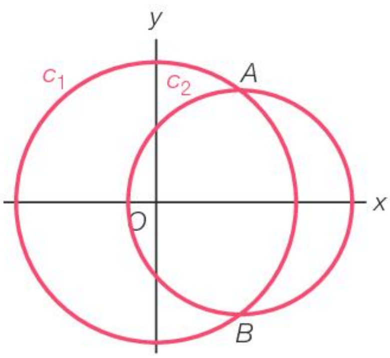


figuur 14.44

O45 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 25$ en c_2: $(x - 3)^2 + y^2 = 16$. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie de figuur hiernaast.
Voor het berekenen van de coördinaten van A en B los je het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ op.
Elimineren van y geeft $x^2 - (x - 3)^2 = 9$ en dit is te herleiden tot $x = 3$.

a Toon dit aan.

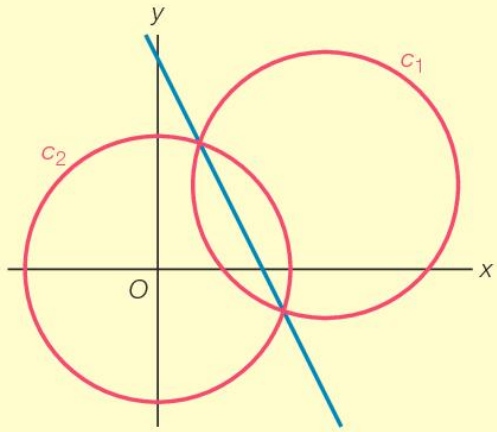
b De oplossing $x = 3$ is de vergelijking van een lijn. Wat heeft deze vergelijking te maken met de snijpunten A en B?



figuur 14.45

Theorie B Snijdende cirkels

De cirkels c_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ en c_2: $x^2 + y^2 = 10$ snijden elkaar in twee punten. Om de coördinaten van deze punten te berekenen, los je een stelsel op. Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken krijg je een vergelijking van de lijn door de twee snijpunten. Door vervolgens deze lijn te snijden met c_1 of c_2 vind je de gevraagde coördinaten.



figuur 14.46

Je krijgt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y = -10 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \; -$$

$$-8x - 4y = -20$$
$$-4y = 8x - 20$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + 5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + (-2x + 5)^2 = 10 \\ x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 10 \\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ (x - 1)(x - 3) = 0 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{array}$$

$x = 1$ en $y = -2x + 5$ geeft het snijpunt $(1, 3)$.
$x = 3$ en $y = -2x + 5$ geeft het snijpunt $(3, -1)$.

46

Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en c_2: $x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ met middelpunten M en N. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 14.47.
Hierbij is $A(3, 3)$.

a Toon dit aan en bereken de coördinaten van B.

De lijnen k in figuur 14.47 gaan door A.
Een vergelijking van k is k: $y = ax + 3 - 3a$.

b Toon dit aan.

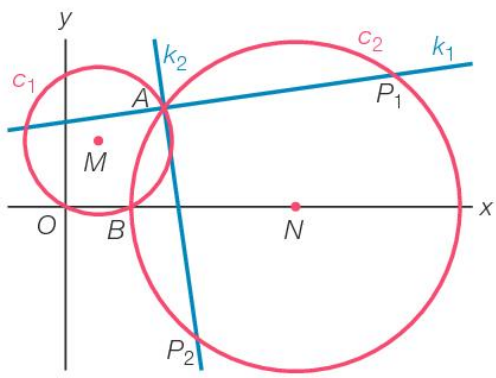
De lijnen k snijden c_2 in de punten P waarbij is gegeven dat $AP = 5\sqrt{2}$.
Hieruit volgt $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c Toon dit aan.

Uit $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt $a = \frac{1}{7} \vee a = -7$.

d Toon dit aan.

e Stel vergelijkingen op van k_1 en k_2.



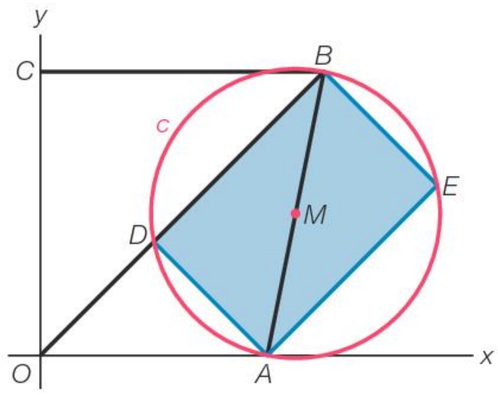
figuur 14.47

R47 Zie opgave 46.
Je kunt de coördinaten van P_1 en P_2 vinden door c_2 te snijden met een cirkel c_3.
Geef een vergelijking van c_3 en bereken de coördinaten van P_1 en P_2 door c_2 en c_3 met elkaar te snijden.

48 Gegeven is de cirkel c_1: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en het punt $B(2, 0)$ op c_1.
Zie opgave 46.
De lijnen l_1 en l_2 gaan door B en cirkel c_1 snijdt van zowel l_1 als van l_2 een lijnstuk met lengte 2 af.
Stel vergelijkingen op van l_1 en l_2.

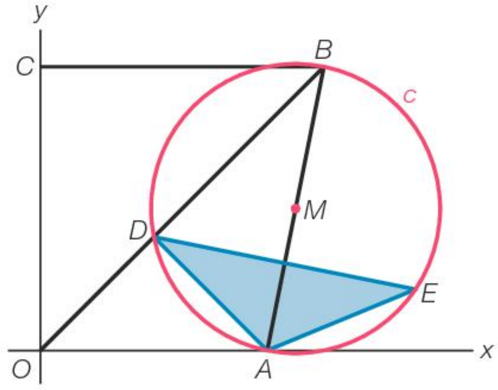
A49 Gegeven is het rechthoekig trapezium $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ en $B(5, 5)$.
Zijde AB is een middellijn van de cirkel c.
Cirkel c snijdt OB in het punt D.
Het punt E ligt op de grote cirkelboog AD.

a Er is een plaats van E waarbij vierhoek $AEBD$ een rechthoek is. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van E voor deze situatie.



figuur 14.48

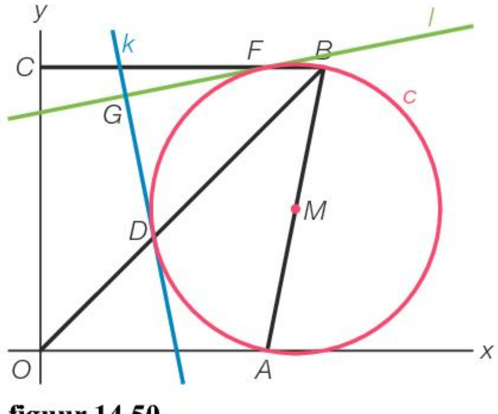
b Er is een plaats van E waarbij driehoek ADE een gelijkbenige driehoek is met top A.
Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de coördinaten van E voor deze situatie.



figuur 14.49

Cirkel c snijdt BC in het punt F.
De lijn k raakt c in D en de lijn l raakt c in F.
De lijnen k en l snijden elkaar in het punt G.
Zie de figuur hiernaast.

c Onderzoek met exacte berekeningen of G op de cirkel met middellijn DF ligt.



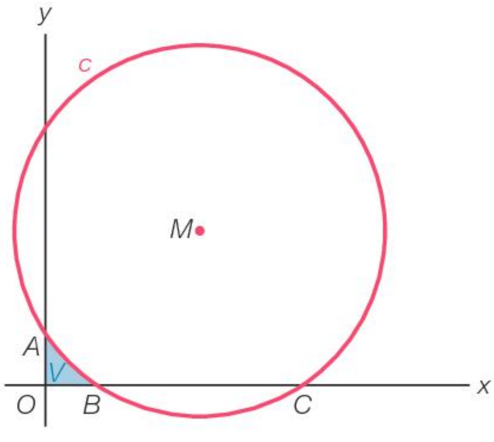
figuur 14.50

A50 ⊙✱ Cirkel c met middelpunt $M(3, 3)$ gaat door het punt $A(0, 1)$.
De lijnen k_1 en k_2 gaan door A en snijden c in de punten P_1 en P_2. De lijnstukken AP_1 en AP_2 hebben lengte 6.

a Stel van k_1 en van k_2 een vergelijking op.

Cirkel c snijdt de x-as in de punten $B(1, 0)$ en $C(5, 0)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de x-as, de y-as en de cirkel. Zie de figuur hiernaast.

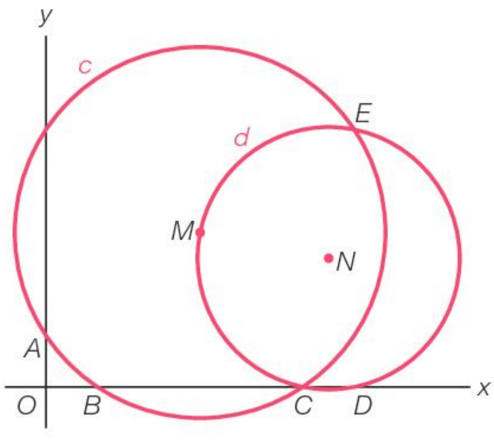
b Bereken de oppervlakte van V. Rond af op twee decimalen.



figuur 14.51

Het punt D ligt op de x-as rechts van C waarbij $CD = 1$.
De cirkel d met middelpunt N gaat door C, D en M en snijdt c behalve in C ook nog in het punt E. Zie de figuur hiernaast.
In C bevindt zich een puntmassa met massa 3,
in D bevindt zich een puntmassa met massa 4,
in E bevindt zich een puntmassa met massa 5 en
in M bevindt zich een puntmassa met massa 8.

c Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt van deze vier puntmassa's.



figuur 14.52

Terugblik

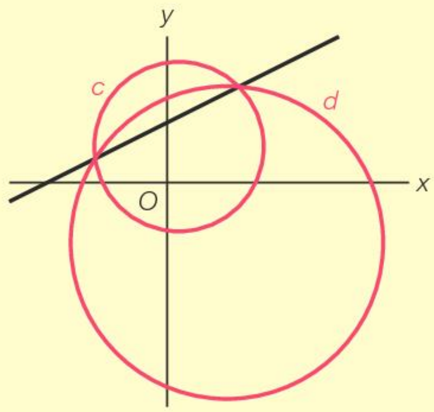
Snijpunten van lijnen en cirkels

Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn l: $y = -x + 3$ en de cirkel c: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ te berekenen, substitueer je $y = -x + 3$ in de cirkelvergelijking. Je krijgt $(x - 6)^2 + (-x + 1)^2 = 17$. Oplossen van deze vergelijking geeft $x = 2 \vee x = 5$.
De coördinaten van de snijpunten van l en c zijn $(2, 1)$ en $(5, -2)$.
Afhankelijk van de vraagstelling mag je de vergelijking die je na substitutie krijgt eventueel grafisch-numeriek oplossen.

Om te berekenen voor welke p de lijn k: $px - y = -5$ de cirkel c: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 17$ raakt, gebruik je $d(M, k) = r$. Hierbij is M het middelpunt van de cirkel en r de straal, dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{17}$. Je krijgt

$$\frac{|5p - 2 + 5|}{\sqrt{p^2 + 1}} = \sqrt{17}$$
$$|5p + 3| = \sqrt{17p^2 + 17}$$
$$25p^2 + 30p + 9 = 17p^2 + 17$$
$$8p^2 + 30p - 8 = 0$$
$$4p^2 + 15p - 4 = 0$$
$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289$$
$$p = \frac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4} \vee p = \frac{-15 - 17}{8} = -4$$

Snijpunten van cirkels



Om de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c: $x^2 + y^2 - x - 3y = 10$ en d: $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 30$ te berekenen, los je het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 3y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x + 5y = 30 \end{cases}$ op.
Aftrekken van de vergelijkingen en herleiden geeft $x = 2y - 5$.
Dit is een vergelijking van de lijn door de snijpunten van de cirkels. Door vervolgens deze lijn te snijden met een van de cirkels, vind je de coördinaten van de snijpunten.
$x = 2y - 5$ substitueren in $x^2 + y^2 - x - 3y = 10$ geeft $(2y - 5)^2 + y^2 - (2y - 5) - 3y = 10$.
Oplossen van deze vergelijking geeft $y = 1 \vee y = 4$.
De coördinaten van de snijpunten van c en d zijn $(-3, 1)$ en $(3, 4)$.

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

051 De parametervoorstelling $x = \cos(t) \wedge y = \sin(t)$ stelt de eenheidscirkel voor.

a Geef een parametervoorstelling van de cirkel c_1 met middelpunt O en straal 3.

b Pas op de cirkel c_1 van vraag a de translatie (2, 4) toe. Je krijgt de cirkel c_2 met parametervoorstelling $x = 2 + 3\cos(t) \wedge y = 4 + 3\sin(t)$. Licht dit toe en geef van c_2 de straal en de coördinaten van het middelpunt.

Theorie A Een parametervoorstelling van een cirkel

In opgave 51b is een **parametervoorstelling van een cirkel** gegeven. Door met de formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ de parameter t te elimineren, krijg je een vergelijking van de cirkel.
Bij de parametervoorstelling $x = 2 + 3\cos(t) \wedge y = 4 + 3\sin(t)$ krijg je
$x = 2 + 3\cos(t) \wedge y = 4 + 3\sin(t)$
$x - 2 = 3\cos(t) \wedge y - 4 = 3\sin(t)$
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (3\cos(t))^2 + (3\sin(t))^2$
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)$
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9(\cos^2(t) + \sin^2(t))$
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$
Je hebt dus te maken met de cirkel met middelpunt (2, 4) en straal 3.

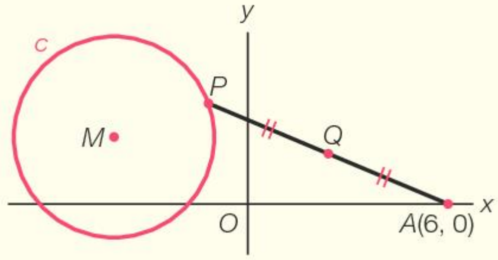
Ook omgekeerd kun je bij een cirkel waarvan een vergelijking is gegeven een parametervoorstelling opstellen.
Zo heeft de cirkel c: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ het middelpunt (1, −2) en straal 5.
Hierbij hoort de parametervoorstelling $x = 1 + 5\cos(t) \wedge y = -2 + 5\sin(t)$.

Van de cirkel $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ is $x = x_M + r\cos(t) \wedge y = y_M + r\sin(t)$ een parametervoorstelling.

Soms krijg je te maken met problemen die je niet met vergelijkingen van cirkels kunt oplossen, maar wel met parametervoorstellingen. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Het punt P doorloopt de cirkel
$c: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$.
Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, waarbij $A(6, 0)$.
Stel een vergelijking op van de kromme waarop Q ligt.



figuur 14.53

Uitwerking
Een parametervoorstelling van c is $x = -4 + 3\cos(t) \wedge y = 2 + 3\sin(t)$.
Het midden Q van $P(-4 + 3\cos(t), 2 + 3\sin(t))$ en $A(6, 0)$ is
$Q(\frac{1}{2}(-4 + 3\cos(t) + 6), \frac{1}{2}(2 + 3\sin(t) + 0)) = Q(1 + 1\frac{1}{2}\cos(t), 1 + 1\frac{1}{2}\sin(t))$.
Dus Q ligt op de cirkel $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\frac{1}{4}$.

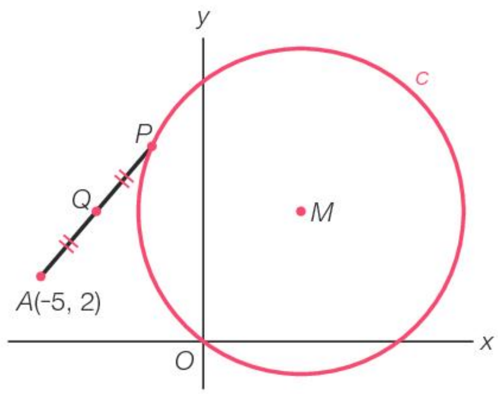
52 Stel bij de parametervoorstelling een cirkelvergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

a $x = 5 + 2\cos(t) \wedge y = -1 + 2\sin(t)$
b $x = 4 + \cos(2t) \wedge y = 3 + \sin(2t)$
c $x = 2\frac{1}{2} + 4\cos(t) \wedge y = 3\frac{1}{2} + 4\sin(t)$
d $x = 1 + 3\sin(2t) \wedge y = 2 + 3\cos(2t)$

53 Stel bij de cirkelvergelijking een parametervoorstelling op van de vorm $x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$.

a $c: (x+3)^2 + (y+4)^2 = 10$
b $c: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$
c $c: x^2 + y^2 + 2y = 0$

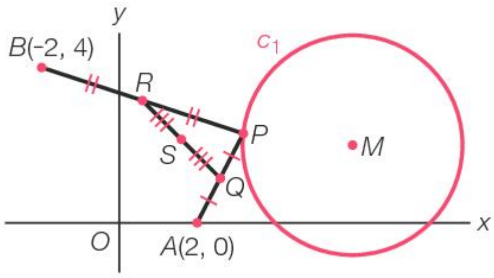
54 Gegeven zijn de cirkel $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ en het punt $A(-5, 2)$.
Het punt P doorloopt c en het punt Q is het midden van AP.
Stel een vergelijking op de kromme waarop Q ligt.



figuur 14.54

55 ✱

Gegeven zijn de cirkel
$c_1: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$ en de punten $A(2, 0)$ en $B(-2, 4)$.
Het punt P doorloopt c_1. Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, het punt R is het midden van het lijnstuk BP en het punt S is het midden van het lijnstuk QR.
S doorloopt de cirkel c_2.
Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

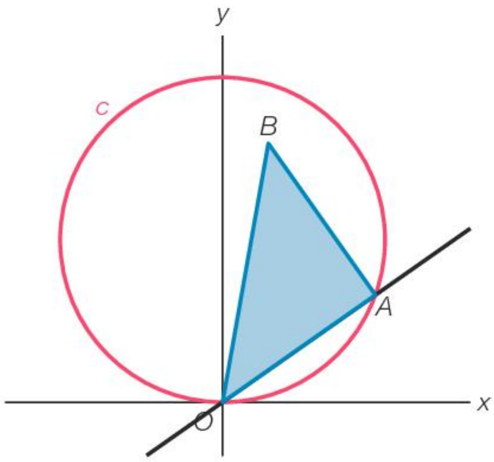


figuur 14.55

A56

Het punt A doorloopt de cirkel c met parametervoorstelling
$x = 2\cos(t) \wedge y = 2 + 2\sin(t)$.
De lijn $y = ax$ snijdt c in de punten $O(0, 0)$ en A.
De vector $\overrightarrow{AB}$ is het beeld van de vector $\overrightarrow{AO}$ bij een rotatie van 90°. Zie de figuur hiernaast, waarin ook driehoek OAB is getekend.
Voor de coördinaten van B geldt
$x_B = -2\sin(t) + 2\cos(t) - 2$ en
$y_B = 2\sin(t) + 2\cos(t) + 2$.

a Bewijs dit.
b Bereken exact de waarde van a in het geval y_B minimaal is.
c Het punt B doorloopt een cirkel.
Stel van deze cirkel een vergelijking op.

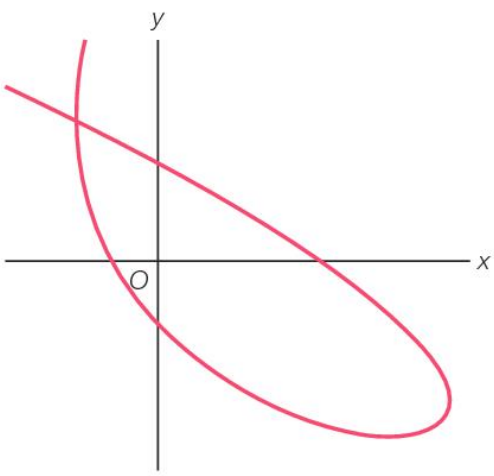


figuur 14.56

O57

De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases}$ met t de tijd in seconden
en x en y in cm. In figuur 14.57 zie je de baan van P.

a Bereken de coördinaten van P op $t = 3$.
b De baan snijdt van de lijn $y = -1$ een lijnstuk af.
Bereken exact de lengte van dit lijnstuk.
c De baan snijdt de lijn $x = 6$ drie keer.
Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.



figuur 14.57

Theorie B Plaats, snelheid en versnelling

De baan van het punt P in opgave 57 is een *parameterkromme*.

De *plaatsvector* van P is $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix}$.

De afgeleide hiervan is de *snelheidsvector*,
dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 6t + 5 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$.

Op $t = -2$ is de snelheidsvector $\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}$, en hieraan kun je zien dat P op $t = -2$ naar rechts en omlaag beweegt.

De afgeleide van de snelheidsvector is de *versnellingsvector*,
dus $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Op $t = -2$ is de versnellingsvector $\vec{a}(-2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, en hieraan kun je zien dat de snelheid van P op $t = -2$ in de positieve x-richting afneemt en in de positieve y-richting toeneemt.

De *baansnelheid* is de lengte van de snelheidsvector. De algemene formule van de baansnelheid is $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.
Bij het punt P krijg je $v(t) = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2}$.
Op $t = -2$ is de baansnelheid $v(-2) = \sqrt{21^2 + (-8)^2} = \sqrt{505} \approx 22{,}5$ cm/s.

De *baanversnelling* is de afgeleide van de baansnelheid, dus $a(t) = v'(t)$.
Bij het punt P krijg je $v(t) = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}$ en
$a(t) = \dfrac{2t^3 - 18t^2 + 50t - 38}{\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}}$. De baanversnelling op $t = -2$ is
$a(-2) = \dfrac{-16 - 72 - 100 - 38}{\sqrt{16 + 96 + 200 + 152 + 41}} \approx -10{,}1$ cm/s^2, en hieraan is te zien dat op $t = -2$ de baansnelheid afneemt.

P gaat voor $t = -1$ en voor $t = 5$ door het punt $(-2\frac{1}{3}, 4)$. De hoek φ waaronder de baan zichzelf in dit punt snijdt, bereken je met behulp van de snelheidsvectoren $\vec{v}(-1)$ en $\vec{v}(5)$ als volgt.

$$\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{v}(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ geeft } \cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} = \frac{36}{6\sqrt{5} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

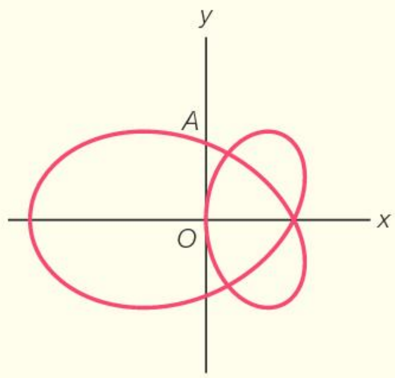
en dit geeft $\varphi \approx 63{,}4°$.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. De baan snijdt de positieve y-as in het punt A. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de coördinaten van A.

b Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal is.



figuur 14.58

Uitwerking

a $x(t) = 0$ geeft $\cos(2t) + \sin(t) = 0$

$$1 - 2\sin^2(t) + \sin(t) = 0$$
$$2\sin^2(t) - \sin(t) - 1 = 0$$
$$(2\sin(t) + 1)(\sin(t) - 1) = 0$$
$$\sin(t) = -\tfrac{1}{2} \vee \sin(t) = 1$$
$$t = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \tfrac{1}{2}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{6}\pi \vee t = 1\tfrac{5}{6}\pi$$

$y(1\tfrac{1}{6}\pi) = \sin(2\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $A(0, \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$.

b $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -2\sin(2t) + \cos(t) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $2\cos(2t) = 0$

$$\cos(2t) = 0$$
$$2t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$
$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \tfrac{1}{4}\pi \vee t = \tfrac{3}{4}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{4}\pi \vee t = \tfrac{3}{4}\pi$$

$t = \tfrac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$

$t = \tfrac{3}{4}\pi$ geeft het punt $(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -1)$

$t = 1\tfrac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$

$t = 1\tfrac{3}{4}\pi$ geeft het punt $(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -1)$

R58 Zie de theorie.

a Toon aan dat uit $v(t) = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2}$ volgt $v(t) = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}$ en toon vervolgens aan dat

$$a(t) = \frac{2t^3 - 18t^2 + 50t - 38}{\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}}.$$

b Toon aan dat de baan van P zichzelf snijdt in het punt $(-2\tfrac{1}{3}, 4)$.

R59 Zie voorbeeld a op de vorige bladzijde.

a Welke verdubbelingsformule is in de uitwerking gebruikt?

b Los de vergelijking $\cos(2t) + \sin(t) = 0$ op door $\sin(t)$ naar het rechterlid te brengen en vervolgens het rechterlid te herleiden tot een cosinus.

c De vergelijking $x(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{6}\pi \vee t = 1\frac{5}{6}\pi$.
Laat zien dat de punten die horen bij $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$ niet op de positieve y-as liggen.

Zie voorbeeld b op de vorige bladzijde.

d De vergelijking $y'(t) = 0$ heeft in $[0, 2\pi]$ vier oplossingen.
Controleer dat elk van deze oplossingen voldoet aan $x'(t) \neq 0$.

60 Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen
$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
De baan van P heeft vier punten waarin de raaklijn verticaal is.
Voor deze punten geldt $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
Uit $x'(t) = 0$ volgt $\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{4}$.

a Toon dit aan.

Uit $\sin(t) = \frac{1}{4}$ volgt $\cos(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$.

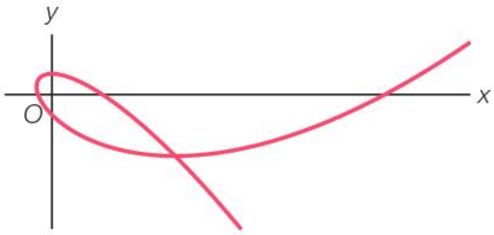
b Toon dit aan.

De bewegingsvergelijkingen zijn te schrijven als $\begin{cases} x(t) = 1 - 2\sin^2(t) + \sin(t) \\ y(t) = 2\sin(t)\cos(t) \end{cases}$

c Licht dit toe.

d Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn verticaal is.

61 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t + 2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \end{cases}$
met t in seconden en x en y in cm.



figuur 14.59

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal is.

b De lijn k raakt de baan in het snijpunt van de baan met de negatieve y-as.
Een normaalvector van k is $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Toon dit aan en stel een vergelijking op van k.

c De baan snijdt zichzelf in het punt $(2, -1)$.
Toon dit aan en bereken de hoek waaronder dit gebeurt.

d Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het snijpunt van de baan met de positieve y-as.

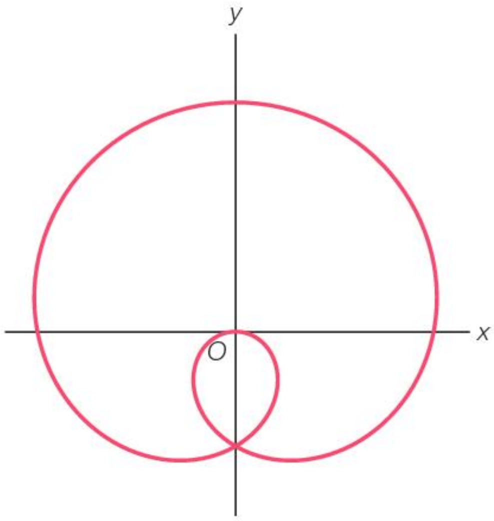
62

Een punt P beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) \end{cases}$.
Hierin is t in seconden en zijn x en y in meters.

a Het punt P passeert op twee tijdstippen de negatieve y-as.
Bereken exact hoeveel seconden tussen deze twee tijdstippen zit.

b Bewijs dat de baan van P symmetrisch is in de y-as. Gebruik dat hiervoor moet gelden $x(p) = -x(\pi - p) \wedge y(p) = y(\pi - p)$.

c Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal is.



figuur 14.60

De baansnelheid van P wordt gegeven door de formule $v(t) = \sqrt{5 + 4\sin(t)}$.

d Bewijs dat deze formule juist is.

e Bereken de maximale en de minimale baansnelheid.

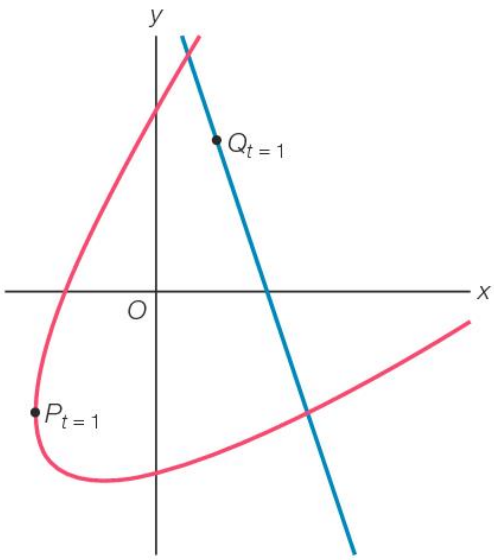
f Bereken exact de baanversnelling op $t = \pi$.

A63

De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x_P(t) = t^2 - 2t - 3 \\ y_P(t) = t^2 + t - 6 \end{cases}$ en de baan van een punt Q is gegeven door $\begin{cases} x_Q(t) = -t + 3 \\ y_Q(t) = 3t + 2 \end{cases}$. Hierin is t de tijd in seconden en zijn x en y in cm.
In figuur 14.61 zijn de banen van P en Q getekend. De plaatsen van P en Q zijn getekend voor $t = 1$.

a Bereken exact de afstand tussen P en Q op $t = 1$.

b Stel een vergelijking op van de baan van Q.



figuur 14.61

Er is precies één waarde van t waarvoor P en Q zich op dezelfde plaats bevinden.

c Bereken exact deze waarde van t en in graden nauwkeurig de hoek tussen de banen in dit punt.

d Bereken exact de coördinaten van het punt van de baan van P waarin de raaklijn evenwijdig is met de baan van Q.

e Bereken exact in welk punt van de baan van P de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.

f Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het snijpunt van de baan van P met de negatieve x-as.

A64

De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

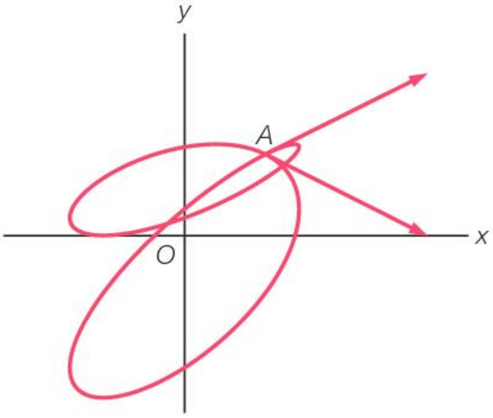
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \cos(2t) \\ y(t) = \cos(2t) - \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a Op verschillende tijdstippen bevindt P zich op de x-as. Op een van die tijdstippen bevindt P zich rechts van de y-as. Bereken exact de x-coördinaat van P op dit tijdstip.

b Er zijn drie tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 2\pi$ waarop de x-coördinaat en de y-coördinaat van P aan elkaar gelijk zijn. Bereken voor deze drie tijdstippen exact de coördinaten van P.

c Bereken de maximale snelheid van P. Rond af op twee decimalen.

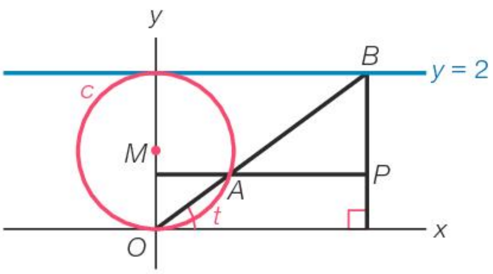
d Op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ bevindt P zich in het punt A, dat in de figuur hiernaast is getekend. Verder zijn ook de snelheidsvectoren van P op $t = 0$ en $t = \pi$ getekend. Bereken algebraïsch in graden de hoek tussen deze twee vectoren. Rond af op één decimaal.



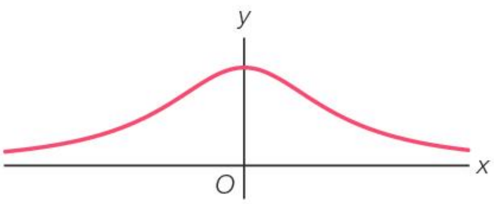
figuur 14.62

A65

Een punt P legt een baan af die als volgt ontstaat. Zie figuur 14.63. De cirkel c heeft middelpunt $M(0, 1)$ en straal 1. De lijn door de oorsprong en een punt A op c snijdt de lijn $y = 2$ in het punt B. De horizontale lijn door A en de verticale lijn door B snijden elkaar in het punt P. De hoek die de lijn OA met de x-as maakt, is t radialen met $0 < t < \pi$. In figuur 14.64 zie je de baan van P.



figuur 14.63



figuur 14.64

Voor deze baan geldt $\begin{cases} x_P(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} \\ y_P(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases}$

a Toon aan dat de formule voor $x_P(t)$ juist is.

b Druk de hoeken van driehoek OAM uit in t en toon aan dat de formule voor $y_P(t)$ juist is.

c De lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt de baan van P in de punten C en D. Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD.

d Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan van P raakt in het punt met $t = \frac{1}{6}\pi$.

Voor de baan van P geldt $y(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

e Bewijs dit.

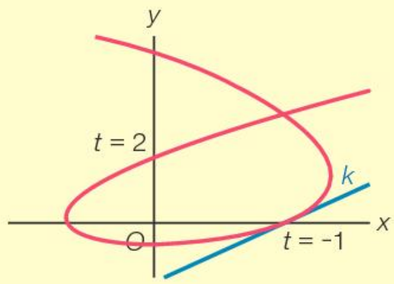
f De baan van P heeft twee buigpunten. Bereken exact de coördinaten van deze buigpunten.

Terugblik

De parametervoorstelling $x = x_M + r\cos(t) \wedge y = y_M + r\sin(t)$

Algemeen heeft de cirkel $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ als parametervoorstelling $x = x_M + r\cos(t) \wedge y = y_M + r\sin(t)$. Om bij de cirkel $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ een parametervoorstelling op te stellen, herleid je de vergelijking eerst tot $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Zo krijg je de parametervoorstelling $x = 5 + 2\sqrt{5} \cdot \cos(t) \wedge y = 2 + 2\sqrt{5} \cdot \sin(t)$.
Bij de parametervoorstelling $x = -3 + 4\cos(t) \wedge y = 6 + 4\sin(t)$ hoort de cirkel $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

Plaats, snelheid en versnelling



De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$ geven de baan van een punt P. In de figuur hiernaast is de baan getekend. De baan is een parameterkromme.
De snelheidsvector is de afgeleide van de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t^2 - 6t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t - 6 \\ 2t \end{pmatrix}$.
Om een vergelijking van de raaklijn k op te stellen in het punt waarvoor $t = -1$, bereken je $\vec{v}(-1)$. Uit $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ volgt $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dus k: $2x - 5y = c$. Omdat $t = -1$ het punt $(6, 0)$ geeft, krijg je k: $2x - 5y = 12$.

Om de hoek φ te berekenen waaronder de baan de y-as snijdt voor $t = 2$, gebruik je $\vec{v}(2)$ en $\vec{r}_{y\text{-as}}$. Je krijgt $\cos(\varphi) = \dfrac{\left|\vec{v}(2) \cdot \vec{r}_{y\text{-as}}\right|}{\left|\vec{v}_2\right| \cdot \left|\vec{r}_{y\text{-as}}\right|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{116} \cdot 1} = \dfrac{4}{\sqrt{116}}$,

dus $\varphi \approx 68{,}2°$.

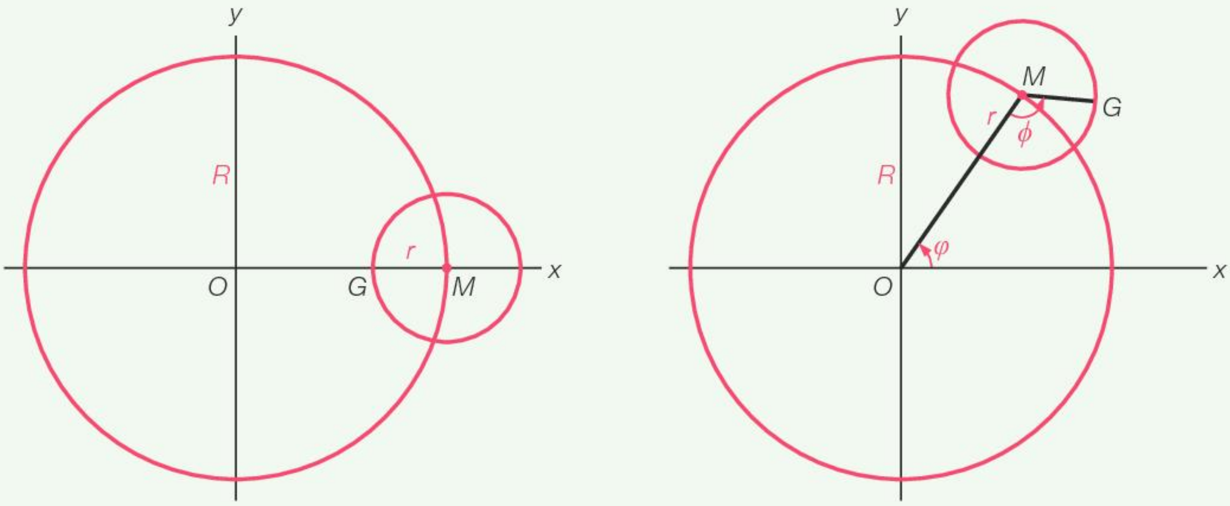
Om de waarden van t te berekenen waarvoor de raaklijn aan de baan verticaal is, los je op $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
$x'(t) = 0$ geeft $3t^2 + 2t - 6 = 0$ en hieruit volgt $t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{19} \vee t = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19}$.
De baansnelheid is de lengte van de snelheidsvector, dus $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De baansnelheid van P op $t = 2$ is $v(2) = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$.
De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 6t + 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
De baanversnelling is de afgeleide van de baansnelheid, dus $a(t) = v'(t)$.
Bij de bewegingsvergelijkingen hierboven bereken je de baanversnelling voor $t = 2$ als volgt.
$v(t) = \sqrt{(3t^2 + 2t - 6)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 12t^3 - 28t^2 - 24t + 36}$ geeft
$a(t) = \dfrac{18t^3 + 18t^2 - 28t - 12}{\sqrt{9t^4 + 12t^3 - 28t^2 - 24t + 36}}$ en $a(2) = \dfrac{148}{\sqrt{116}} \approx 13{,}7$.

Eindopdracht De octopus

De Octopus is een populaire attractie op kermissen en in pretparken. Op de foto hiernaast zie je een Octopus bestaande uit zes grote armen met aan het uiteinde van elke arm een kruis met daaraan vijf gondels. Zowel de grote armen als de kruizen draaien rond. Verder gaan de grote armen op en neer. In deze opdracht maak je een wiskundig model van de Octopus. In dit model zijn de gondels punten die om een punt draaien terwijl dat punt zelf een cirkel beschrijft. Hierbij laat je het op en neer gaan van de armen buiten beschouwing.

In de figuren hieronder is de oorsprong O het middelpunt van een Octopus. De uiteinden van de armen bewegen over de grote cirkel met middelpunt O en straal R. De kleine cirkel met middelpunt M en straal r is een cirkel waarover de gondels van één van de kruizen bewegen. We bekijken de beweging van gondel G.



Neem de linkerfiguur als start van de Octopus. In de rechterfiguur is M over φ radialen om O gedraaid en G over ϕ radialen ten opzichte van OM om M. De draairichtingen zijn met pijltjes aangegeven.
Er geldt dan $x_G = R\cos(\varphi) - r\cos(\varphi + \phi) \wedge y_G = R\sin(\varphi) - r\sin(\varphi + \phi)$.

- Bewijs dit.

Ga bij de volgende twee vragen uit van de volgende situatie.

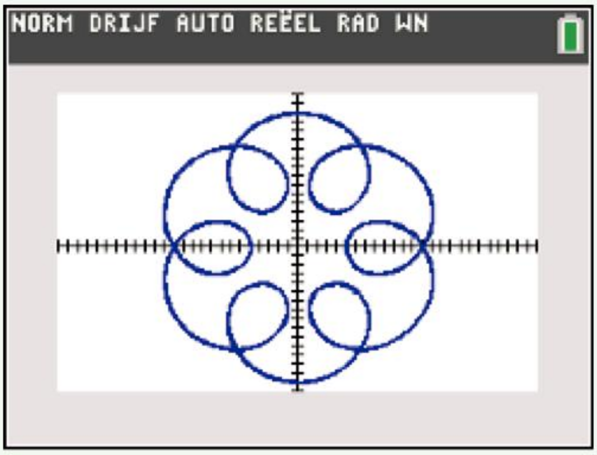
- $R = 10$ meter en $r = 3$ meter.
- De armen draaien in 20 seconden één keer rond.
- De kruizen draaien ten opzichte van OM in 5 seconden één keer rond M.

De bewegingsvergelijkingen van G zijn in dat geval

$x(t) = 10\cos(0{,}1\pi t) - 3\cos(0{,}5\pi t) \wedge y(t) = 10\sin(0{,}1\pi t) - 3\sin(0{,}5\pi t)$

met x en y in meters en t in seconden.

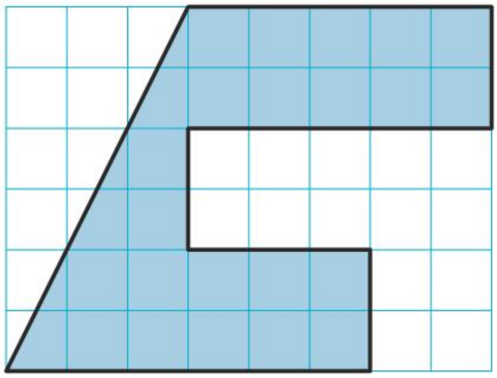
- Licht dit toe en plot de baan van G.
- Bereken exact de plaats, de baansnelheid en de baanversnelling van G op $t = 10$.
- Plot de baan van G bij enkele andere situaties.
- Onderzoek welke gegevens passen bij de situatie die hiernaast geplot is. Hierbij is $R = 10$ en draaien de armen in 18 seconden één keer rond.



Diagnostische toets

14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

1 Teken de plaats van het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 14.65.



figuur 14.65

2 Gegeven is driehoek ABC met $A(-1, -2)$, $B(11, 3)$ en $C(-4, 2)$. De bissectrice b van $\angle BAC$ snijdt de middelloodlijn m van AB in het punt S.
Bereken algebraïsch de coördinaten van S.

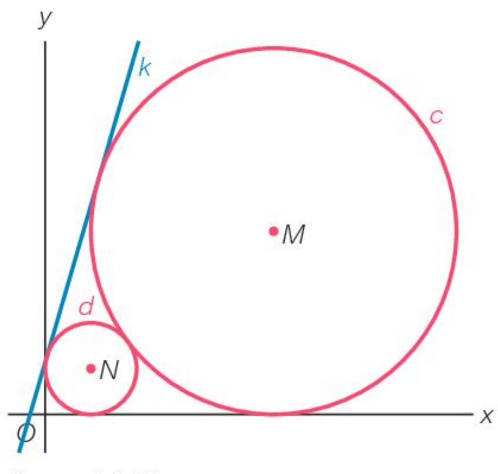
14.2 Cirkels en raaklijnen

3 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - y = 0$, l: $x - 2y = -8$ en m: $x - 3y = 0$. De middelpunten van de cirkels c_1 en c_2 liggen op m, en c_1 en c_2 raken k en l.
Stel van c_1 en van c_2 algebraïsch een vergelijking op.

4 De cirkel c met middelpunt $M(5, 4)$ raakt de x-as.
De cirkel d met middelpunt N raakt de positieve x-as, de positieve y-as en c.
Zie figuur 14.66.

a Stel van d een vergelijking op.

b Verder is gegeven de cirkel e met middelpunt $(3, 3)$ en straal 3.
Stel vergelijkingen op van de lijnen die de cirkels c en e raken.



figuur 14.66

14.3 Cirkels en snijpunten

5 Gegeven is de cirkel c: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

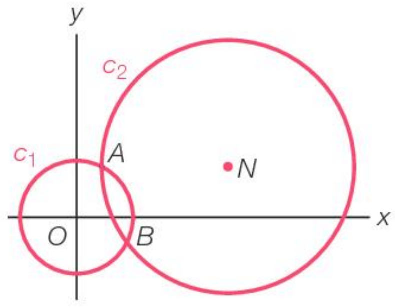
a Bereken voor welke a de lijn k: $y = ax + 2$ de cirkel c in twee punten snijdt.

b Bereken voor welke b de lijn l: $y = \frac{1}{2}x + b$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c.

6 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 5$ en c_2 met middelpunt $N(6, 2)$ en straal 5.
De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 14.67. Hierbij is $A(1, 2)$.

a Toon dit aan en bereken de coördinaten van B.

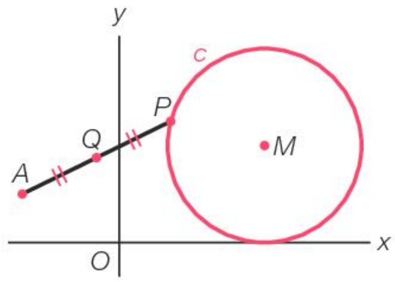
b De lijnen k_1 en k_2 gaan door A en snijden c_2 in de punten P waarbij $AP = 5\sqrt{2}$.
Stel vergelijkingen op van k_1 en k_2.



figuur 14.67

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

7 Het punt P doorloopt de cirkel c: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP waarbij $A(-4, 2)$.
Stel een vergelijking op van de kromme waarop Q ligt.



figuur 14.68

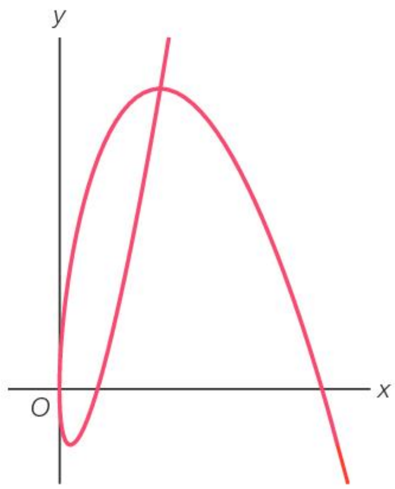
8 De baan van het punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \end{cases}$ met t de tijd in seconden en x en y in cm. Zie figuur 14.69.

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

b De baan gaat voor $t = 2$ door het punt A. De lijn k raakt de baan in A.
Stel van k een vergelijking op.

c De baan snijdt zichzelf in het punt $B(9, 27)$.
Bereken de hoek φ in graden waaronder de baan zichzelf snijdt in B. Rond af op één decimaal.

d De baan gaat voor $t = -1$ door het punt C.
Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in C.



figuur 14.69

9 De baan van het punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = t + \cos(t) \end{cases}$ met $-\pi \leq t \leq \pi$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

b Marijke beweert dat de baansnelheid maximaal is in het punt $A(0, -\frac{1}{2}\pi)$.
Onderzoek of Marijke gelijk heeft.

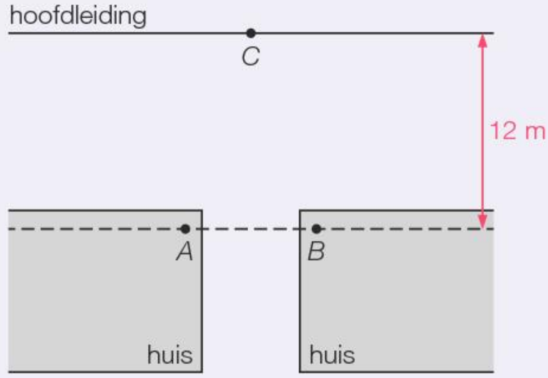
15 Afgeleiden en primitieven

Wat leer je?

- Oplossen van problemen over afstanden en oppervlakten bij grafieken.
- Optimaliseringsproblemen oplossen.
- Het verband tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen en de eerste en tweede afgeleide.
- Werken met evenredige en omgekeerd evenredige verbanden.
- Integralen gebruiken bij problemen over oppervlakte en inhoud.

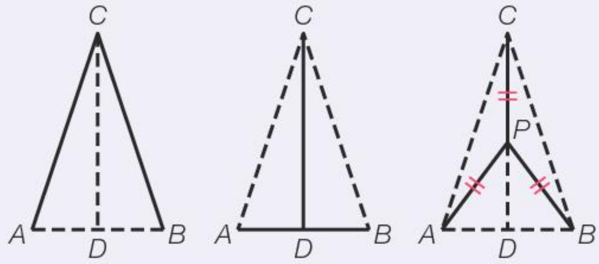
Beginopdracht Waterleidingnet

In een nieuwbouwwijk moeten de huizen worden aangesloten op het waterleidingnet. In de figuur is de situatie geschetst voor twee huizen.
In het punt C wordt een aftakking gemaakt van de hoofdleiding naar de punten A en B in de huizen. De punten A, B en C liggen zo, dat $AB = 8$ meter en $AC = BC$. Verder is de hoofdleiding evenwijdig met AB, op een afstand van 12 meter van de lijn door A en B.



De verbinding tussen C en de beide huizen kan op verschillende manieren tot stand worden gebracht.
In de figuur hiernaast zie je er drie.

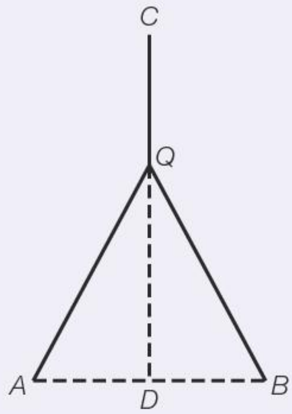
I Vanaf C twee rechtstreekse leidingen naar A en B.
II Vanaf C een leiding naar het midden D van AB, die vervolgens vertakt naar A en B.
III Vanaf C een leiding naar een punt P op de symmetrieas CD van driehoek ABC en vervolgens uit P vertakkingen naar A en B waarbij $AP = BP = CP$.



- Bereken bij elk van deze drie mogelijkheden de totale lengte van de verbinding. Rond zo nodig af op dm.

Hiernaast zie je een vierde mogelijkheid, waarbij vanaf C een leiding naar een punt Q op CD wordt gelegd met vanuit Q vertakkingen naar A en B. De afstand tussen C en Q is onbekend. Door de afstand tussen C en Q gelijk te stellen aan x, kun je de totale lengte van de verbinding uitdrukken in x. Je krijgt dan $L(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 24x + 160}$.

- Toon dit aan.
- Controleer met deze formule de antwoorden van de eerste vraag.
- Bereken de totale lengte van de verbinding in het geval Q op een afstand van drie meter van de lijn door A en B komt te liggen.



mogelijkheid IV

Het waterleidingbedrijf wil de leidingen zo leggen, dat de totale lengte van de verbinding minimaal is.

- Bereken algebraïsch wat de afstand tussen C en Q in dat geval is, en bereken deze minimale lengte. Rond af op dm.

Voorkennis Lengten van lijnstukken

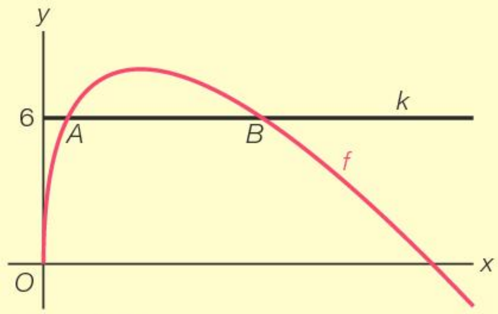
Theorie A Horizontale en verticale lijnstukken

Gegeven is de functie $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ en de horizontale lijn k: $y = 6$. De grafiek van f en lijn k snijden elkaar in de punten A en B. Zie de figuur hiernaast.
De lengte van het lijnstuk AB bereken je met $AB = x_B - x_A$.

$f(x) = 6$ geeft $8\sqrt{x} - 2x = 6$

$$4\sqrt{x} = x + 3$$
$$16x = x^2 + 6x + 9$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x-1)(x-9) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 9$$

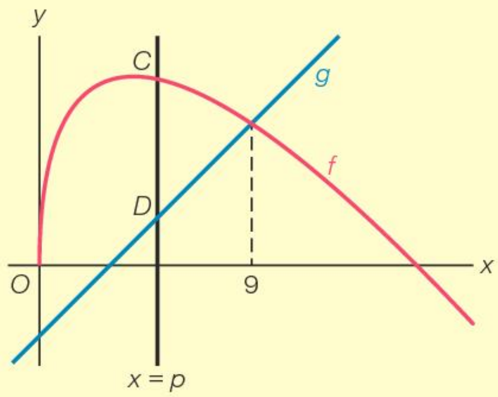
Dus $AB = x_B - x_A = 9 - 1 = 8$.



figuur 15.1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ en $g(x) = x - 3$.
De verticale lijn $x = p$ met $0 < p < 9$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D.
Voor de lengte van het lijnstuk CD in figuur 15.2 geldt $CD = f(p) - g(p)$.
In het geval $CD = 8$, krijg je

$$8\sqrt{p} - 2p - (p - 3) = 8$$
$$8\sqrt{p} - 2p - p + 3 = 8$$
$$8\sqrt{p} = 3p + 5$$
$$64p = 9p^2 + 30p + 25$$
$$9p^2 - 34p + 25 = 0 \text{ met } D = 256$$
$$p = \frac{34 + 16}{18} = 2\tfrac{7}{9} \vee p = \frac{34 - 16}{18} = 1$$



figuur 15.2

1 Gegeven is de functie $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ van de theorie.
De grafiek van f snijdt de horizontale lijn l: $y = 7\frac{1}{2}$ in de punten E en F, met E links van F.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk EF.

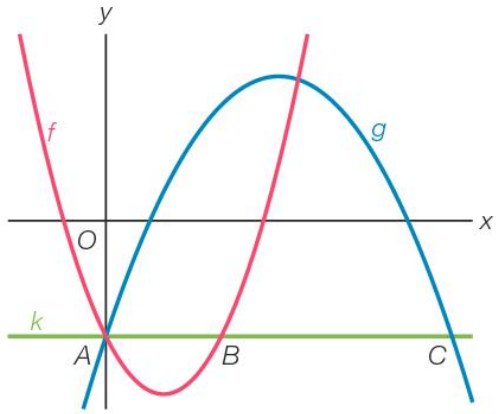
2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ en $g(x) = x - 3$ van de theorie en de verticale lijn $x = p$ die de grafiek van f snijdt in het punt C en de grafiek van g in het punt D.
Rechts van het snijpunt van de grafieken van f en g geldt $CD = g(p) - f(p)$.
Licht dit toe en bereken exact de waarde van p als in dat geval geldt $CD = 8$.

3 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$ en $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 4$. De grafieken van f en g snijden elkaar op de y-as in het punt A. De horizontale lijn k door A snijdt de grafiek van f verder nog in het punt B, en de grafiek van g in het punt C. Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat $AB : BC = 1 : 2$.

De verticale lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt D en de grafiek van g in het punt E.

b Bereken exact voor welke waarden van p de lengte van het lijnstuk DE gelijk is aan 8.



figuur 15.3

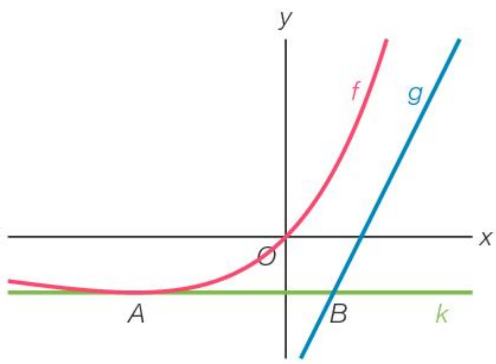
4 Gegeven zijn de functies $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = 2x - 1$.
De top van de grafiek van f is het punt A. De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de grafiek van g in het punt B. Zie de figuur hiernaast.
De afgeleide van f is $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x$.

a Toon dit aan.

b Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

De verticale lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D.

c Bereken exact voor welke waarden van p de lengte van het lijnstuk CD gelijk is aan 1.

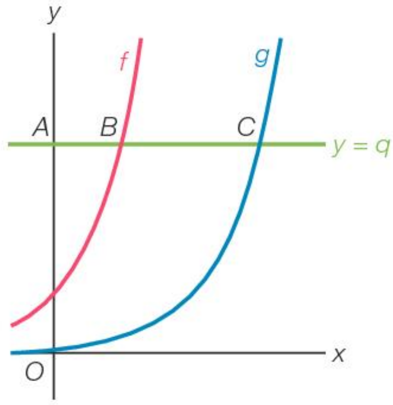


figuur 15.4

15.1 Lijnstukproblemen

01 In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = e^{x-3}$.
De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C.
We vragen ons af wat de waarde van q is in het geval geldt $AB : BC = 1 : 2$.
Om deze vraag te beantwoorden, stellen we $x_B = p$.

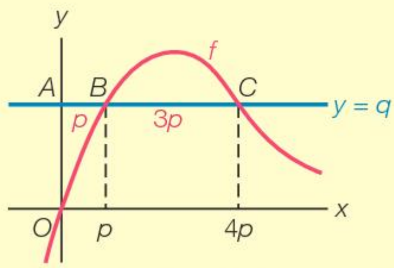
a Licht toe dat uit $x_B = p$ en $AB : BC = 1 : 2$ volgt $x_C = 3p$.
b Licht toe dat $e^p = e^{3p-3}$ en bereken p.
c Bereken exact de waarde van q.



figuur 15.5 $AB : BC = 1 : 2$

Theorie A Verhouding van lijnstukken

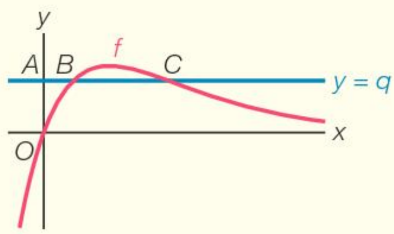
In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie f getekend. De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van f in de punten B en C waarbij de lengtes van de lijnstukken AB en BC zich verhouden als $AB : BC = 1 : 3$. Hieruit volgt $BC = 3AB$.
Stel je $x_B = p$, dan is $x_C = AB + BC = p + 3p = 4p$.
Omdat $y_B = y_C$ is $f(p) = f(4p)$.
Na het oplossen van deze vergelijking bereken je q met $q = f(p)$.



figuur 15.6 Uit $AB : BC = 1 : 3$ volgt $BC = 3AB$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 6x\,e^{-x}$.
De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van f in de punten B en C waarbij $AB : BC = 1 : 2$.
Bereken q exact.



figuur 15.7

Uitwerking
Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 3p$.

$$\begin{aligned} f(p) = f(3p) \text{ geeft } 6p\,e^{-p} &= 18p\,e^{-3p} \\ 6p = 0 \ &\vee \ e^{-p} = 3\,e^{-3p} \\ p = 0 \ &\vee \ e^{2p} = 3 \\ \text{vold. niet } &\ 2p = \ln(3) \\ &\ p = \tfrac{1}{2}\ln(3) \end{aligned}$$

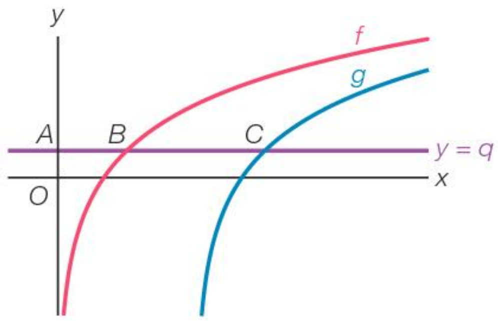
$$q = f(p) = f(\tfrac{1}{2}\ln(3)) = 6 \cdot \tfrac{1}{2}\ln(3) \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\ln(3)} = 3\ln(3) \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \ln(3)$$

R2 Zie het voorbeeld.
a Licht toe hoe uit $e^{-p} = 3\,e^{-3p}$ volgt $e^{2p} = 3$.
b Laat zien dat $e^{-\frac{1}{2}\cdot\ln(3)}$ gelijk is aan $3^{-\frac{1}{2}}$.

3 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Bereken exact voor welke waarde van q het lijnstuk AB even lang is als het lijnstuk BC.

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \ln(x - 3)$.
De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C waarbij $AB : BC = 1 : 2$.

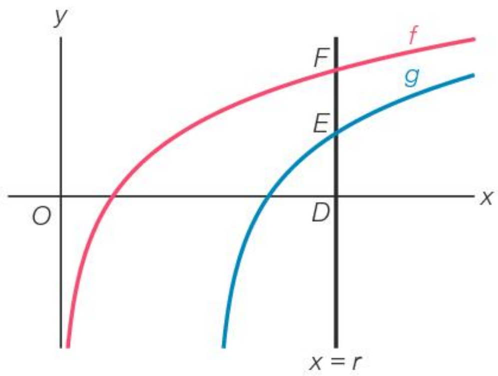
a Bereken exact de waarde van q.



figuur 15.8

De lijn $x = r$ snijdt de x-as in het punt D, de grafiek van g in het punt E en de grafiek van f in het punt F zo, dat E het midden van DF is.

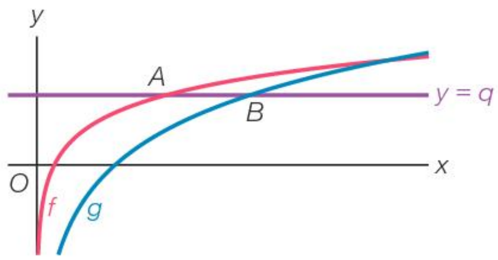
b Licht toe dat $f(r) = 2 \cdot g(r)$ en bereken exact de waarde van r.



figuur 15.9

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = 2\ln(x) - 3$.
De lijn $y = q$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B waarbij A links van B ligt en de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan 3.
Stel $x_A = p$. Dan is $x_B = p + 3$.

a Bereken de waarden van q. Rond af op twee decimalen.



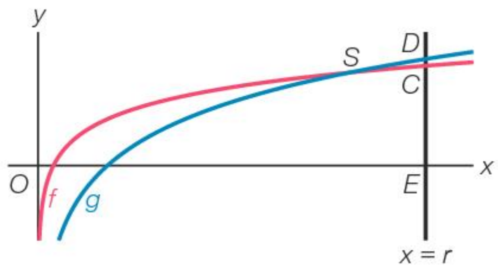
figuur 15.10

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S.

b Bereken exact de coördinaten van S.

De lijn $x = r$ ligt rechts van S en snijdt de grafiek van f in het punt C, de grafiek van g in het punt D en de x-as in het punt E.
Als r onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\frac{CD}{CE}$ tot een grenswaarde.

c Bereken exact deze grenswaarde.

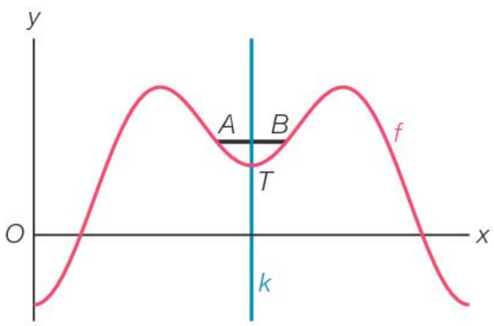


figuur 15.11

6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. Zie de figuur hiernaast. Het punt T is een top van de grafiek van f, lijn k is de verticale lijn door T, en AB is een horizontaal lijnstuk met lengte 1 waarvan de eindpunten A en B op de grafiek van f liggen.
De grafiek van f is symmetrisch in k.

a Bewijs dit.
b Bereken de afstand van T tot AB. Rond af op twee decimalen.

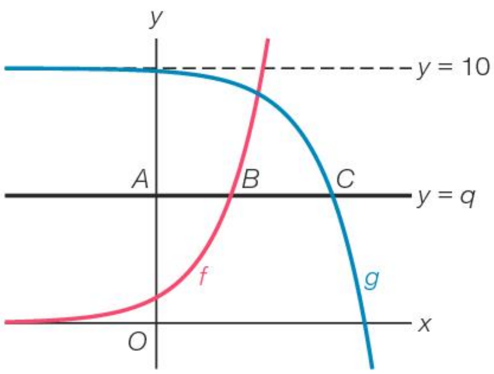


figuur 15.12

A7

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 10 - 3^{x-2}$.
De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C.

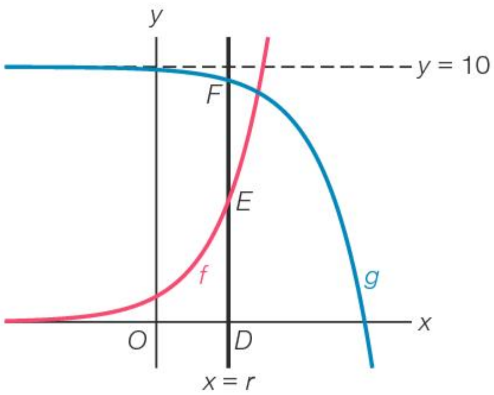
a Bereken exact voor welke q de lengte van het lijnstuk BC gelijk is aan 2.
b Bereken exact de waarde van q in het geval B het midden is van AC.



figuur 15.13

De lijn $x = r$ snijdt de x-as in het punt D, de grafiek van f in het punt E en de grafiek van g in het punt F zo, dat E het midden van DF is.

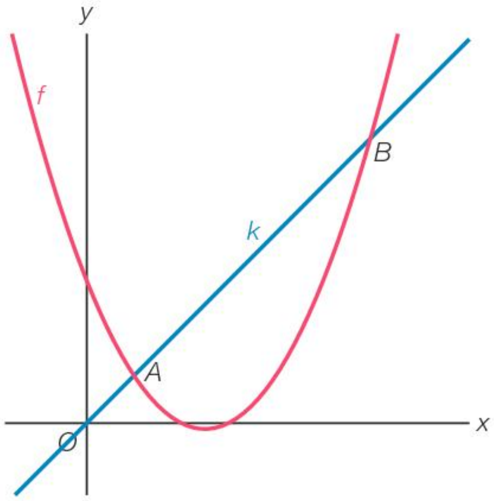
c Bereken exact de waarde van r.



figuur 15.14

E8

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
De lijn k gaat door de oorsprong en snijdt de grafiek van f in de punten A en B waarbij de lengtes van de lijnstukken OA en AB zich verhouden als $OA : AB = 1 : 5$.
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van k.

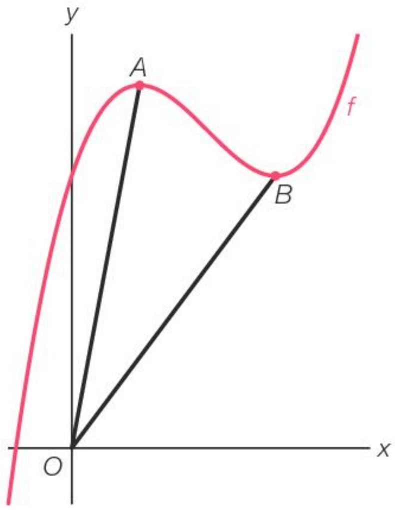


figuur 15.15

O9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f met de toppen A en B en de lijnstukken OA en OB.

a Bereken exact de coördinaten van A en B.

b Bereken van de lijnstukken OA en OB de lengte. Rond zo nodig af op twee decimalen.



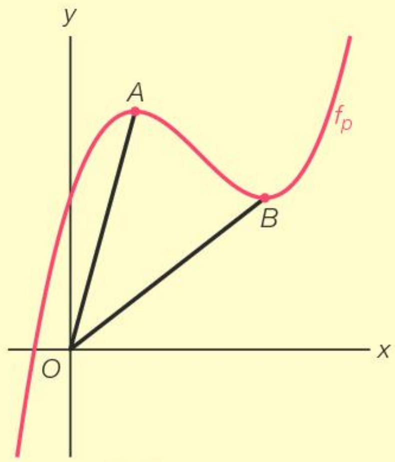
figuur 15.16

Theorie B Toppen en lijnstukken

Voor elke waarde van p heeft de grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + p$ twee toppen. We noemen deze toppen A en B, met A links van B.
Om te berekenen voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB, ga je als volgt te werk.

- Bereken de x-coördinaten van A en B.
  Je krijgt $x_A = 1$ en $x_B = 3$.
- Druk y_A en y_B uit in p.
  Je krijgt $y_A = 1\frac{1}{3} + p$ en $y_B = p$.
- Druk OA^2 en OB^2 uit in p.
  Je krijgt $OA^2 = 1^2 + (1\frac{1}{3} + p)^2 = p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9}$ en $OB^2 = 3^2 + p^2 = p^2 + 9$.
- Los de vergelijking $OA^2 = OB^2$ op.
  Je krijgt $p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9} = p^2 + 9$ en dit geeft $p = 2\frac{1}{3}$.

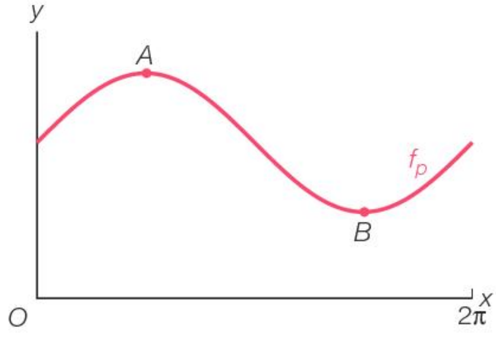
Dus voor $p = 2\frac{1}{3}$ is de lengte van het lijnstuk OA gelijk aan de lengte van het lijnstuk OB.



figuur 15.17

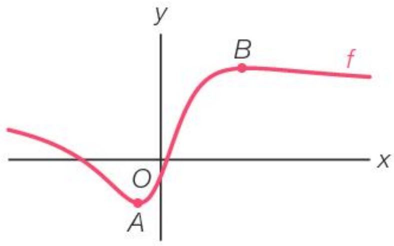
R10 Zie de theorie.
Bereken de lengte van het lijnstuk AB in het geval de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB. Rond af op twee decimalen.

11 Voor elke p is functie f_p gegeven door $f_p(x) = p + \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. De toppen van de grafiek van f_p zijn A en B. Zie figuur 15.18.
Bereken exact voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB.



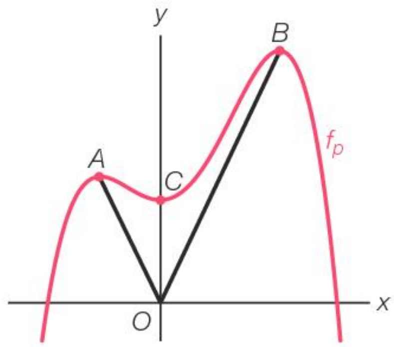
figuur 15.18

12 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 4}$. In figuur 15.19 zie je de grafiek van f met de toppen A en B. Door de grafiek van f over een afstand p naar beneden te schuiven, ontstaat de grafiek van de functie g met de toppen C en D.
Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk OC gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OD.



figuur 15.19

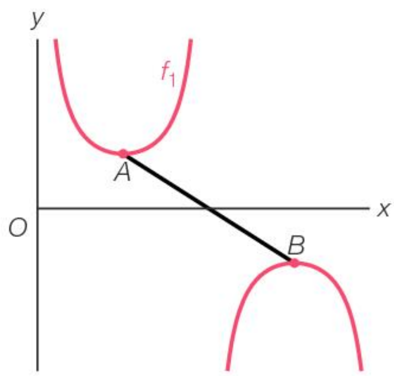
A13 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -0{,}03x^4 + 0{,}08x^3 + 0{,}48x^2 + p$. In figuur 15.20 is de grafiek van f_p voor een zekere waarde van p getekend. De toppen van de grafiek zijn A, B en C. De waarde van p in figuur 15.20 is zo gekozen, dat geldt $OB = 2OA$.
Bereken exact deze waarde van p.



figuur 15.20

A14 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = \dfrac{\sin(x)}{p - \cos^2(x)}$.
Hiernaast zie je de grafiek van f_1 met de toppen A en B en het lijnstuk AB.

a Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk AB. Rond af op twee decimalen.



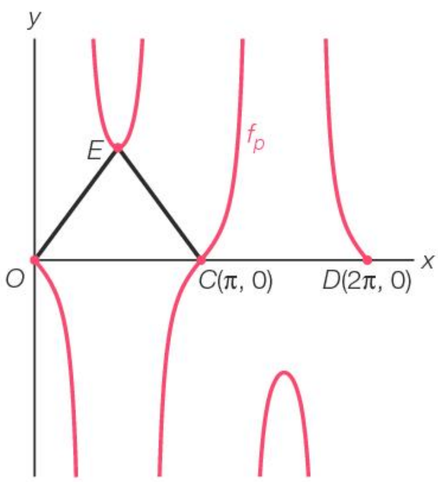
figuur 15.21

Voor $0 < p < 1$ snijdt de grafiek van f_p de x-as in de punten $O(0, 0)$, $C(\pi, 0)$ en $D(2\pi, 0)$. Verder ligt het punt E op de grafiek van f_p met $x_E = \frac{1}{2}\pi$.

b Toon aan dat de raaklijn van de grafiek van f_p in het punt E horizontaal is.

c Bereken exact voor welke p driehoek OCE een gelijkzijdige driehoek is.

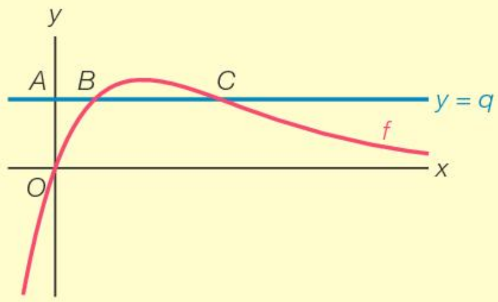
d Bereken exact voor welke p de hoek tussen OE en CE gelijk is aan 90 graden.



figuur 15.22

Terugblik

Horizontale lijnstukken



De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van $f(x) = 10x\,e^{-x}$ in de punten B en C.

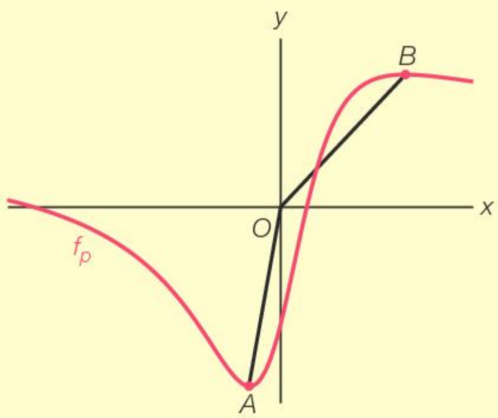
Om q te berekenen in het geval is gegeven dat $AB : BC = 1 : 3$, stel je $x_B = p$. Dan is $x_C = 4p$.
Omdat $y_B = y_C$ geldt nu $f(p) = f(4p)$ oftewel $10p\,e^{-p} = 40p\,e^{-4p}$.
Dit geeft $10p = 0 \vee e^{-p} = 4\,e^{-4p}$

$$\begin{aligned} p = 0 \quad &\vee e^{3p} = 4 \\ \text{vold. niet} \quad &3p = \ln(4) \\ &p = \tfrac{1}{3}\ln(4) \end{aligned}$$

Dit geeft $q = f(\frac{1}{3}\ln(4)) \approx 2{,}91$.

Om q te berekenen in het geval is gegeven dat $BC = 3$, stel je $x_B = p$.
Dan is $x_C = p + 3$ en geldt $f(p) = f(p + 3)$.
Invoeren van $y_1 = 10x\,e^{-x}$, $y_2 = 10(x + 3)\,e^{-(x+3)}$ en de optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}16$ en $y \approx 1{,}34$. Dus $q \approx 1{,}34$.

Toppen en lijnstukken



Voor elke p is gegeven de functie

$$f_p(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 1} + p.$$

De grafiek van f_p heeft de toppen A en B. Zie de figuur hiernaast.
Om te berekenen voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB, druk je eerst de coördinaten van A en B uit in p.

$f_p(x) = \dfrac{4x - 3}{x^2 + 1} + p$ geeft

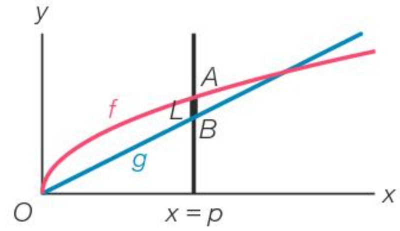
$$f_p'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 4 - (4x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} f_p'(x) = 0 \text{ geeft } &-4x^2 + 6x + 4 = 0 \\ &2x^2 - 3x - 2 = 0 \text{ met } D = 25 \\ &x = \frac{3 + 5}{4} = 2 \vee x = \frac{3 - 5}{4} = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Je krijgt $A(-\frac{1}{2}, -4 + p)$ en $B(2, 1 + p)$.
Dit geeft $OA^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (-4 + p)^2 = p^2 - 8p + 16\frac{1}{4}$
en $OB^2 = 2^2 + (1 + p)^2 = p^2 + 2p + 5$.
Oplossen van de vergelijking $OA = OB$ oftewel $OA^2 = OB^2$ geeft $p = 1\frac{1}{8}$.

15.2 Optimaliseringsproblemen

015 In figuur 15.23 zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{2x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$ getekend. De grafieken snijden elkaar rechts van de oorsprong in het punt (8, 4). De verticale lijn $x = p$ met $0 < p < 8$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. De lengte van het lijnstuk AB noemen we L.
De formule van L is $L = \sqrt{2p} - \frac{1}{2}p$.



figuur 15.23

a Licht dit toe.
b Bereken voor welke p de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

Theorie A Optimaliseren van lengten van verticale lijnstukken

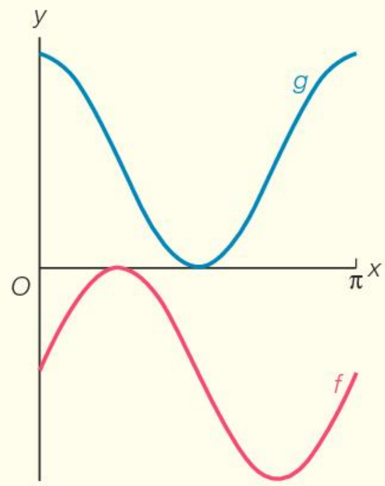
Om de maximale of minimale lengte van een verticaal lijnstuk tussen twee grafieken te berekenen, stel je eerst een formule van die lengte op. Vervolgens kun je deze lengte maximaliseren of minimaliseren.
In opgave 15 heb je de maximale lengte van lijnstuk AB berekend.
Afhankelijk van de vraagstelling kies je de grafisch-numerieke of de algebraïsche aanpak.

Vraagstelling	*Uitwerking*
Bereken (zonder nadere toevoeging)	Je bent vrij in de manier van uitwerken. Een toelichting is vereist. Bij gebruik van de GR vermeld je de ingevoerde formules en de gebruikte opties. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken met de afgeleide Bereken met behulp van differentiëren	Bereken de formule van de afgeleide. Daarna mag je de vergelijking ‘afgeleide = 0’ wel grafisch-numeriek oplossen.
Bereken algebraïsch	Stap voor stap zonder gebruik te maken van opties van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken exact	Ga algebraïsch te werk en rond niet af.
Toon aan	Geef een redenering en/of een berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Bewijs	Geef een redenering en/of een exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt bij de afgeleide van de formule $L = 2\cos^2(p) - \sin(2p) + 1$ de **d-notatie** gebruikt.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x) - 1$ en $g(x) = 2\cos^2(x)$, beide met domein $[0, \pi]$. In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en g getekend.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact voor welke p de lengte L van het lijnstuk AB maximaal is.



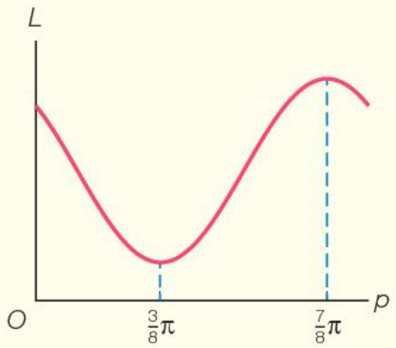
figuur 15.24

Uitwerking

$L = g(p) - f(p) = 2\cos^2(p) - (\sin(2p) - 1)$
$\quad = 2\cos^2(p) - \sin(2p) + 1$

$\dfrac{dL}{dp} = 4\cos(p) \cdot -\sin(p) - \cos(2p) \cdot 2$
$\quad = -4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p)$

$\dfrac{dL}{dp} = 0$ geeft $-4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p) = 0$
$2\sin(p)\cos(p) = -\cos(2p)$
$\sin(2p) = -\cos(2p)$
$\tan(2p) = -1$
$2p = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
$p = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
p in $[0, \pi]$ geeft $p = \frac{3}{8}\pi \vee p = \frac{7}{8}\pi$



L is maximaal voor $p = \frac{7}{8}\pi$.

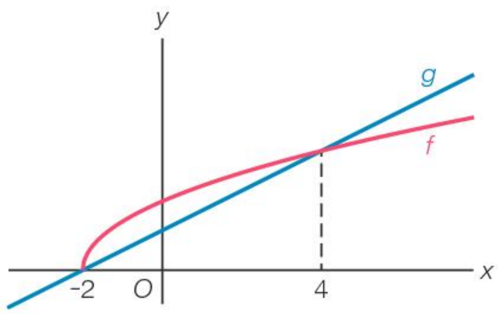
R16 Zie het voorbeeld.

a Bereken exact het maximum van L. Herleid hiertoe eerst de formule van L.

b De vergelijking $\sin(2p) = -\cos(2p)$ is opgelost door te gebruiken $\dfrac{\sin(2p)}{\cos(2p)} = \tan(2p)$.
Bedenk twee andere manieren om deze vergelijking exact op te lossen.

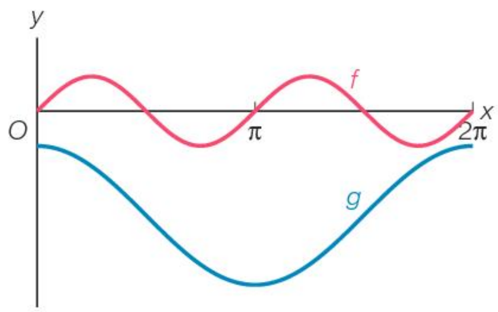
17 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{6x + 12}$ en $g(x) = x + 2$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g.
De lijn $x = p$ met $-2 < p < 4$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Voor de lengte L van het lijnstuk AB geldt de formule $L = \sqrt{6p + 12} - p - 2$.

a Licht deze formule toe.
b Bereken exact de maximale waarde van L.



figuur 15.25

18 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ en $g(x) = \cos(x) - 1\frac{1}{2}$, beide met domein $[0, 2\pi]$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk AB.



figuur 15.26

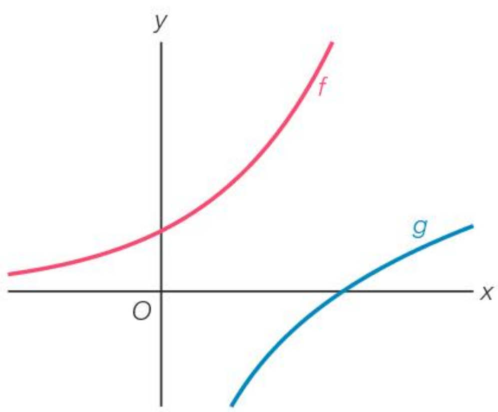
19 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x^3 + 8)$ en $g(x) = x$.
De snijpunten van de grafieken zijn A en B met $x_A < x_B$.
De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafieken in de punten C en D.
Bereken met de afgeleide voor welke p de lengte van het lijnstuk CD maximaal is. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

20 Gegeven is de functie $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Voor de inverse van f geldt $f^{\text{inv}}(x) = 2\ln(x)$.

a Bewijs dit.

De grafiek van f^{inv} wordt ten opzichte van de y-as vermenigvuldigd met factor 3. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g.
De lijn $x = p$ met $p > 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.

b Bereken de minimale lengte van het lijnstuk AB. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



figuur 15.27

A21 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = 5x^2\,\mathrm{e}^x$.

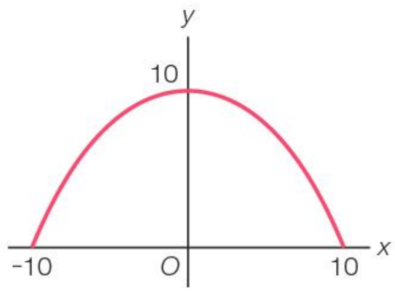
a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de extreme waarden van g.

c De lijn $x = p$ met $p < 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

d De lijn $x = q$ met $0 < q < 1$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D.
Bereken de maximale lengte van het lijnstuk CD. Rond af op drie decimalen.

A22 In een kettingboog treden alleen maar drukkrachten op.
De algemene formule voor een kettingboog die symmetrisch is in de y-as, is $y_k = \frac{1}{2}a(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}x} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}x}) + b$.
Men wil een kettingboog k maken zoals in figuur 15.28.
Hierin zijn x en y in meters. Deze kettingboog snijdt de x-as in de punten $(-10, 0)$ en $(10, 0)$ en de y-as in het punt $(0, 10)$. Hieruit volgt dat, afgerond op twee decimalen, geldt dat $a = -6{,}19$ en $b = 16{,}19$.



figuur 15.28 De kettingboog k.

a Bereken a en b waarbij je afrondt op drie decimalen.

De kettingboog lijkt op een parabool. Zo dacht bijvoorbeeld Galileo Galilei dat een kettingboog een parabool was. Maar Christiaan Huygens toonde in 1646 aan dat dit niet juist kon zijn.
Je kunt onderzoeken hoeveel de parabool met top $(0, 10)$ die de x-as snijdt in de punten $(-10, 0)$ en $(10, 0)$ afwijkt van de kettingboog k.
De algemene formule voor deze parabool is $y_p = mx^2 + n$.

b Bereken in cm nauwkeurig het maximale verschil tussen y_k en y_p.

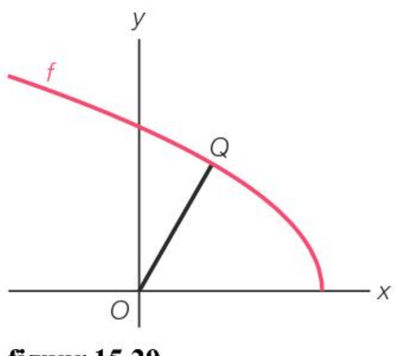
O23 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ en een punt Q op de grafiek van f. Hiernaast zijn de grafiek van f en het lijnstuk OQ getekend.

a Neem $x_Q = 2$ en bereken exact de lengte van OQ.

Neem $x_Q = q$. Voor de lengte L van lijnstuk OQ geldt de formule $L = \sqrt{q^2 - 2q + 5}$.

b Licht deze formule toe.

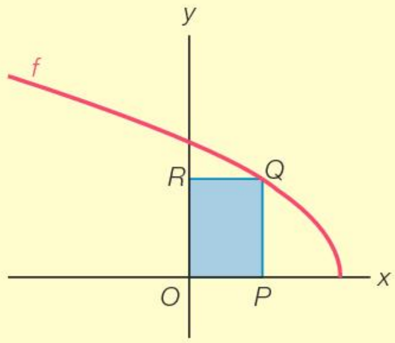
c Bereken de minimale lengte van het lijnstuk OQ.



figuur 15.29

Theorie B Optimaliseren van lengten en oppervlakten

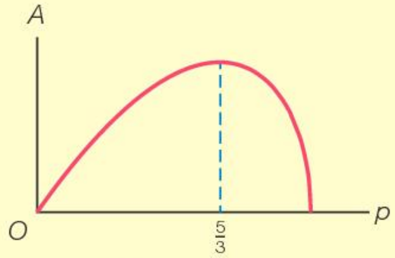
Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ van opgave 23 en een punt Q op de grafiek van f. Van rechthoek $OPQR$ ligt P op de positieve x-as en R op de positieve y-as. Zie de figuur hiernaast.
We vragen ons af wat de maximale oppervlakte van rechthoek $OPQR$ is. Daartoe noemen we de oppervlakte van de rechthoek A en stellen we $x_P = p$.
Dan geldt $A = p \cdot f(p) = p\sqrt{5 - 2p}$, en dit geeft
$\frac{dA}{dp} = \frac{5 - 3p}{\sqrt{5 - 2p}}$. Uit $\frac{dA}{dp} = 0$ volgt $p = \frac{5}{3}$.



figuur 15.30

In de schets van A zie je dat A maximaal is voor $p = \frac{5}{3}$.

De maximale oppervlakte is $\frac{5}{3}\sqrt{5 - 2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{5}{9}\sqrt{15}$.



figuur 15.31

In opgaven moet je vaak de juistheid van een formule aantonen of bewijzen. Houd je hierbij aan de volgende afspraak.

Afspraak
Bij het aantonen of bewijzen dat een formule juist is, leid je stap voor stap de formule af. Je mag je niet beperken tot het geven van enkele getallenvoorbeelden.

R24

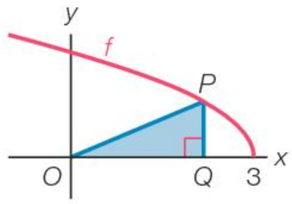
Zie de theorie hierboven.

a Toon aan dat uit $A = p\sqrt{5 - 2p}$ volgt $\frac{dA}{dp} = \frac{5 - 3p}{\sqrt{5 - 2p}}$.

b Herleid $\frac{5}{3}\sqrt{5 - 2 \cdot \frac{5}{3}}$ tot $\frac{5}{9}\sqrt{15}$.

25

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3 - x}$.
Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < 3$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x-as.
Voor de oppervlakte A van driehoek OPQ geldt $A = \frac{1}{2}p\sqrt{3 - p}$.



figuur 15.32

a Bewijs dat deze formule juist is.

Uit $A = \frac{1}{2}p\sqrt{3 - p}$ volgt $\frac{dA}{dp} = \frac{6 - 3p}{4\sqrt{3 - p}}$.

b Bewijs dit.

c Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ.

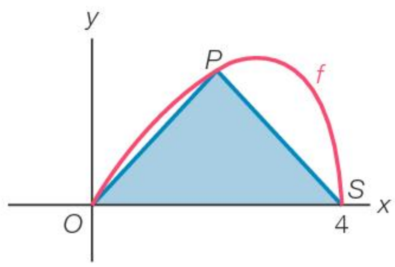
Voor de lengte L van het lijnstuk OP geldt $L = \sqrt{p^2 - p + 3}$.

d Bewijs dat deze formule juist is.

e Bereken exact de minimale lengte van OP.

26 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{8 - 2x}$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten O en S.
Van driehoek OSP ligt het punt P met $0 < x_P < 4$ op de grafiek van f. Zie figuur 15.33.
Stel $x_P = p$.

a Bereken exact de maximale waarde van de oppervlakte A van driehoek OSP.

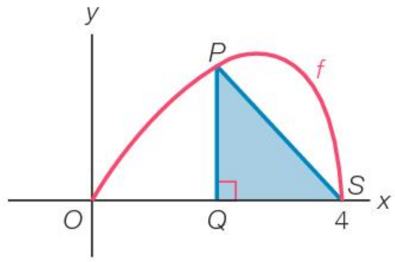


figuur 15.33

Zie figuur 15.34 met de rechthoekige driehoek QSP.
Voor de oppervlakte O van driehoek QSP geldt de formule $O = (2p - \frac{1}{2}p^2)\sqrt{8 - 2p}$.

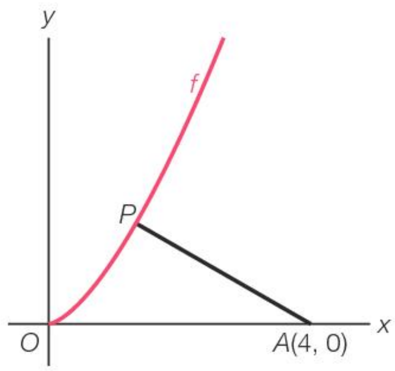
b Bewijs dat deze formule juist is.

c Bewijs dat $\dfrac{dO}{dp} = \dfrac{5p^2 - 28p + 32}{2\sqrt{8 - 2p}}$ en bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van driehoek QSP. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



figuur 15.34

27 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ en het punt $A(4, 0)$.
Op de grafiek van f ligt het punt P zo, dat de lengte van het lijnstuk AP minimaal is.
Bereken deze minimale lengte. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

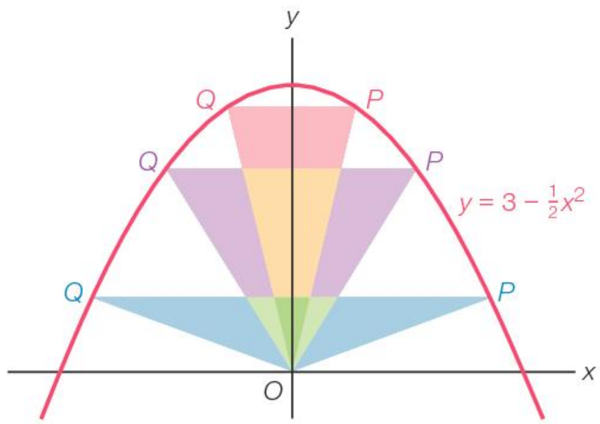


figuur 15.35

A28 Gegeven is de parabool $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$ met daarop de punten P en Q. Hierbij is $y_P = y_Q$ en $y_P > 0$. Zie figuur 15.36.

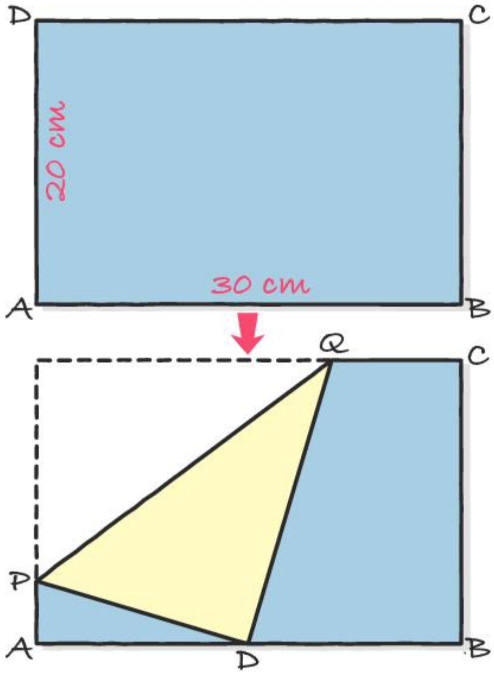
a Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ.

b Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk OP.



figuur 15.36

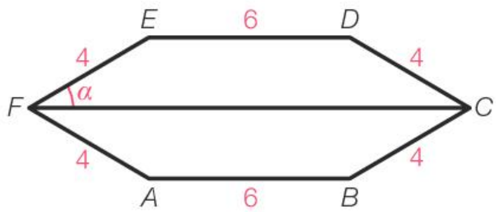
E29 ✱ Bij een velletje papier van 30 bij 20 cm wordt een hoekpunt zo omgevouwen, dat het op een lange zijde van het papier komt. Zie figuur 15.37.
Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van driehoek ADP. Geef het antwoord in cm^2 en rond af op twee decimalen.



figuur 15.37

O30 Van zeshoek $ABCDEF$ in figuur 15.38 is $AB = DE = 6$, $BC = CD = EF = AF = 4$, $AB \parallel CF \parallel DE$ en $\angle CFE = \alpha$.

a Toon aan dat $AE = 8\sin(\alpha)$.
b Toon aan dat $O(\triangle AEF) = 16\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
c Toon aan dat $O(ABDE) = 48\sin(\alpha)$.
d Toon aan dat $O(ABCDEF) = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$.



figuur 15.38 De oppervlakte van de zeshoek hangt af van α.

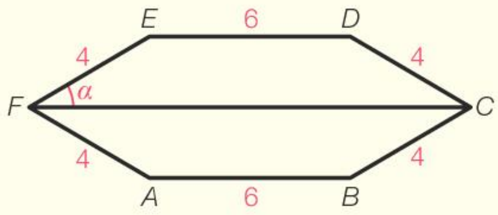
Theorie C Optimaliseren bij goniometrische modellen

Bij het berekenen van een extreme waarde van een goniometrische formule met behulp van differentiëren, is het nodig dat in de formule de hoek is uitgedrukt in radialen. Immers bij het bewijs dat $[\sin(x)]' = \cos(x)$ is gebruikt dat x in radialen is.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de hoek α berekend waarbij de oppervlakte A van de zeshoek in figuur 15.38 maximaal is. Omdat de opdracht is om dit op algebraïsche wijze te doen, heb je de afgeleide van A nodig. De waarde van α die je na het oplossen van de vergelijking 'afgeleide = 0' krijgt, is dus in radialen. Omdat het antwoord in graden wordt gevraagd, gebruik je de regel $\alpha \text{ rad} = \alpha \cdot \frac{180°}{\pi}$ om de hoek om te rekenen naar graden.

Voorbeeld

Hiernaast zie je nogmaals de zeshoek van opgave 30.
Voor de oppervlakte A van de zeshoek geldt de formule $A = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$ met α in radialen en $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.
Bereken algebraïsch in graden nauwkeurig bij welke hoek α de oppervlakte van de zeshoek maximaal is.



figuur 15.39

Uitwerking

$A = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$ geeft

$\frac{dA}{d\alpha} = 16\cos(2\alpha) \cdot 2 + 48\cos(\alpha) = 32\cos(2\alpha) + 48\cos(\alpha)$

$\frac{dA}{d\alpha} = 0$ geeft

$32\cos(2\alpha) + 48\cos(\alpha) = 0$

$2\cos(2\alpha) + 3\cos(\alpha) = 0$ $\quad\quad$ $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$

$2(2\cos^2(\alpha) - 1) + 3\cos(\alpha) = 0$

$4\cos^2(\alpha) + 3\cos(\alpha) - 2 = 0$

Stel $\cos(\alpha) = u$.

$4u^2 + 3u - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot {-2} = 41$

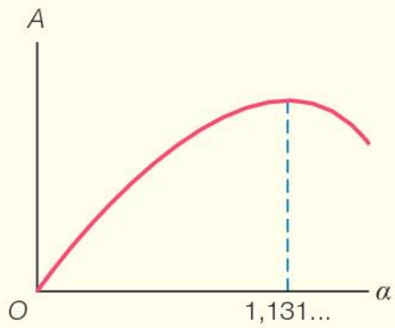
$u = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8} = 0{,}425... \vee u = \frac{-3 - \sqrt{41}}{8} = -1{,}175...$

$\cos(\alpha) = 0{,}425... \vee \cos(\alpha) = -1{,}175...$

$\alpha = 1{,}131... + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -1{,}131... + k \cdot 2\pi$

α in $[0, \frac{1}{2}\pi]$ geeft $\alpha = 1{,}131...$

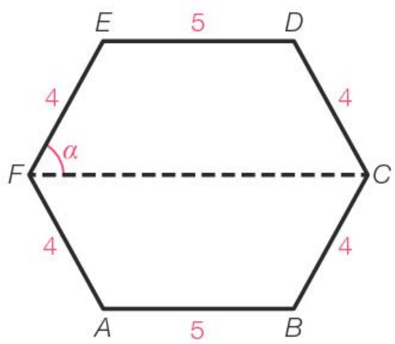
De oppervlakte is maximaal bij $\alpha = 1{,}131... \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 65°$.



31 Van de zeshoek $ABCDEF$ in figuur 15.40 is $AB = DE = 5$, $BC = CD = EF = AF = 4$ en $AB \parallel CF \parallel DE$.
Stel $\angle CFE = \alpha$ rad.

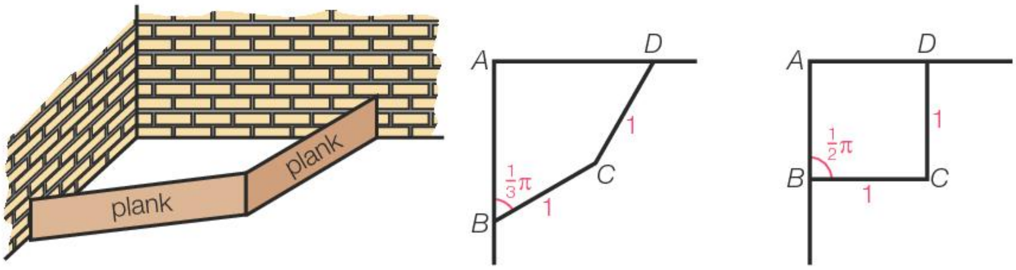
a Stel de formule op van de oppervlakte A van de zeshoek.

b Bereken algebraïsch in graden nauwkeurig bij welke hoek α de oppervlakte van de zeshoek maximaal is.



figuur 15.40 De oppervlakte van de zeshoek hangt af van α.

32 In een hoek van een tuin wordt een zandbak gemaakt. Hiervoor worden twee planken van elk 1 meter gebruikt. Zie figuur 15.41.
De planken worden zo geplaatst, dat de zandbak van bovenaf bekeken een symmetrische vierhoek is. In figuur 15.41 zie je twee mogelijke situaties. Er geldt steeds $AB = AD$, $BC = CD = 1$ meter en vierhoek $ABCD$ is symmetrisch in de diagonaal AC.

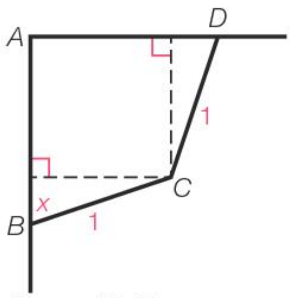


figuur 15.41

a Laat met een berekening zien dat de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ met $\angle B = \frac{1}{3}\pi$ groter is dan die met $\angle B = \frac{1}{2}\pi$.

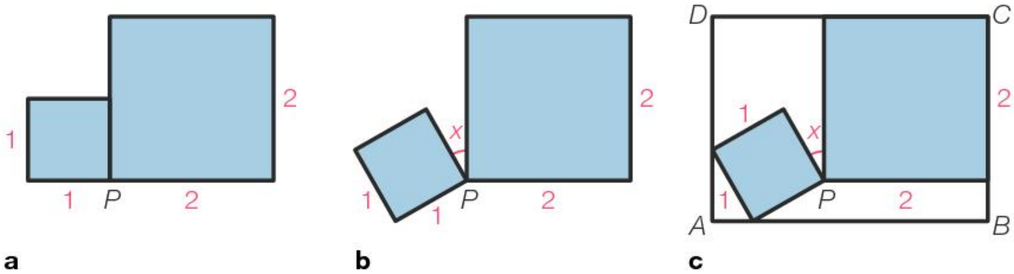
In figuur 15.42 is hoek B gelijk gesteld aan x.
Voor de oppervlakte O van vierhoek $ABCD$ geldt de formule $O = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x)$.

b Bewijs dat deze formule juist is.
c Bereken exact de maximale oppervlakte van de vierhoek.



figuur 15.42

33 Gegeven zijn een vierkant met zijde 2 en een vierkant met zijde 1.
De vierkanten zijn scharnierend aan elkaar verbonden in het punt P.
Zie figuur 15.43a.
Het kleine vierkant wordt over een hoek van x graden gedraaid, met $0° < x < 90°$. Zie figuur 15.43b.
$ABCD$ is de kleinste rechthoek waar de beide vierkanten in passen.
Zie figuur 15.43c.

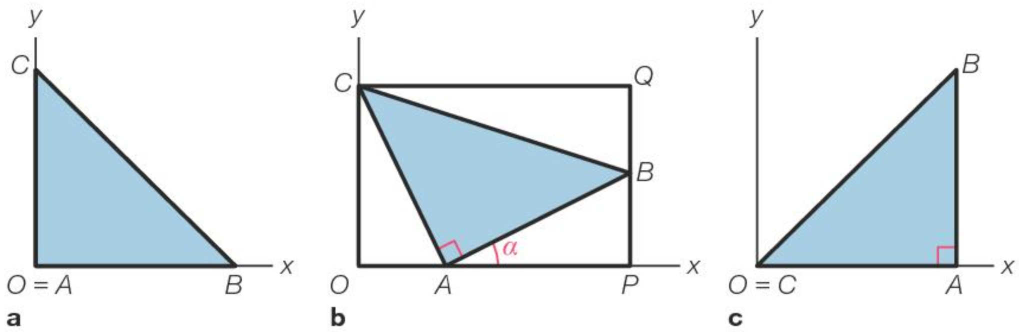


figuur 15.43

De oppervlakte O van rechthoek $ABCD$ hangt af van x.
Voor O geldt de formule $O = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + 4\sin(x) + 2\cos(x) + 4$.

a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bereken in graden nauwkeurig bij welke hoek x de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ maximaal is.

A34 Gegeven is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$ en $AB = AC = 1$. De driehoek wordt in een assenstelsel geplaatst waarbij het punt A in O terecht komt en AB langs de positieve x-as valt. Zie figuur 15.44a.



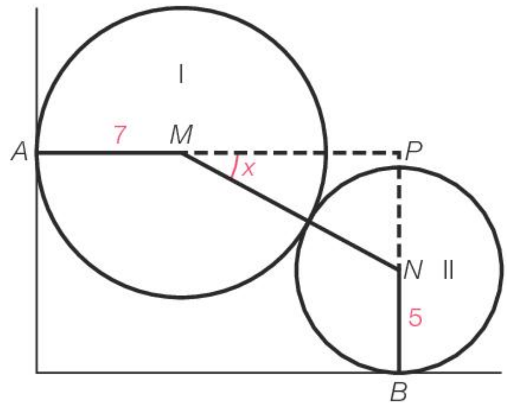
figuur 15.44

Daarna wordt het punt A verschoven over de positieve x-as. Daarbij verschuift het punt C over de positieve y-as. In figuur 15.44b zie je een tussenstand en in figuur 15.44c is de eindstand getekend.
In figuur 15.44b is de hoek die AB met de positieve x-as maakt aangegeven met α. Bovendien is de rechthoek $OPQC$ getekend. Daarbij ligt P op de x-as en B op PQ.
Voor de oppervlakte V van rechthoek $OPQC$ geldt $V = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$.

a Bewijs dat deze formule juist is.

b Bereken exact voor welke α de oppervlakte van rechthoek $OPQC$ maximaal is.

A35 In figuur 15.45 zie je een schematische dwarsdoorsnede van twee rollende cilinders die elkaar in elke stand raken. Cilinder I heeft een straal van 7 dm en cilinder II heeft een straal van 5 dm. Het middelpunt M van I kan in verticale richting bewegen, het middelpunt N van II kan in horizontale richting bewegen. Daardoor blijft I raken aan de verticale wand en blijft II raken aan de vloer. De raakpunten noemen we A en B, het snijpunt van de lijnen AM en BN noemen we P en $\angle PMN = x$ rad.



figuur 15.45

De afstand L tussen de punten A en B hangt af van x. Voor L geldt de formule $L = \sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}$. Hierin is L in dm.

a Toon aan dat deze formule juist is.

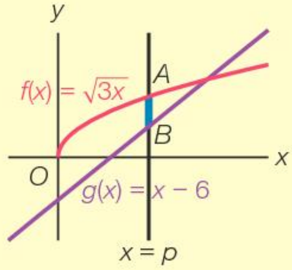
b Bereken $\angle PMN$ in graden nauwkeurig in het geval $L = 20$.

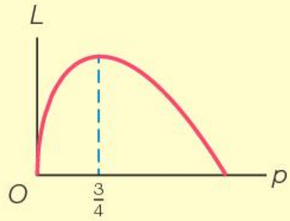
c Bereken met behulp van de afgeleide de maximale afstand tussen A en B in cm nauwkeurig.

Terugblik

Afstanden bij grafieken

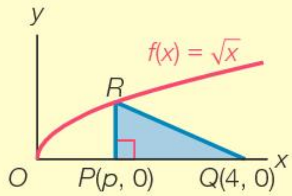
Snijdt de lijn $x = p$ de grafieken van de functies f en g in de punten A en B, dan is de lengte L van het lijnstuk AB uit te drukken in p. Je krijgt $L = f(p) - g(p)$ of $L = g(p) - f(p)$.
Zo hoort bij de lengte L van het lijnstuk AB in de figuur hiernaast de formule $L = \sqrt{3p} - p + 6$. Bij het algebraïsch berekenen van de maximale lengte van L krijg je $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\frac{3 - 2\sqrt{3p}}{2\sqrt{3p}} = 0$ en dit geeft $p = \frac{3}{4}$.
Uit de schets van L blijkt dat er sprake is van een maximum.
De maximale waarde van L is $\sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} - \frac{3}{4} + 6 = 6\frac{3}{4}$.

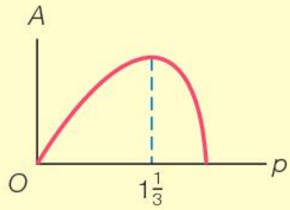




Oppervlakten bij grafieken

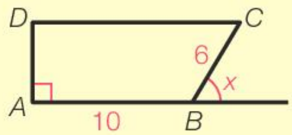
Bij het maximaliseren van de oppervlakte van een driehoek of een rechthoek waarvan één of meer hoekpunten op de grafiek van een functie liggen, stel je eerst de formule op die bij de oppervlakte hoort.
Zo hoort bij de oppervlakte A van de rechthoekige driehoek PQR hiernaast de formule $A = \frac{1}{2}(4 - p)\sqrt{p} = (2 - \frac{1}{2}p)\sqrt{p}$.
Bij het exact berekenen van het maximum van A ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.
$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\frac{4 - 3p}{4\sqrt{p}} = 0$, dus $p = 1\frac{1}{3}$.
Uit de schets van A blijkt dat er sprake is van een maximum.
De maximale waarde van A is $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ voor $p = 1\frac{1}{3}$.

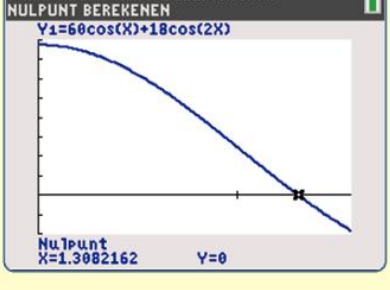




Optimaliseren bij goniometrische formules

In situaties waarbij een hoek kan variëren, krijg je met goniometrische formules te maken. Zo is de oppervlakte O van het rechthoekig trapezium $ABCD$ in de figuur hiernaast een functie van x. Hierbij beperken we ons tot scherpe hoeken x.
De bijbehorende formule is $O = 60\sin(x) + 18\sin(x)\cos(x)$.
De hoek waarbij de oppervlakte van het trapezium maximaal is, is met de afgeleide te berekenen.
$O = 60\sin(x) + 18\sin(x)\cos(x) = 60\sin(x) + 9\sin(2x)$
met x in radialen geeft $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 60\cos(x) + 18\cos(2x)$.
$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 0$ met x in $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ geeft $x \approx 1{,}308$.
De oppervlakte is maximaal voor $x \approx 1{,}308$ rad oftewel bij een hoek van ongeveer 75°.



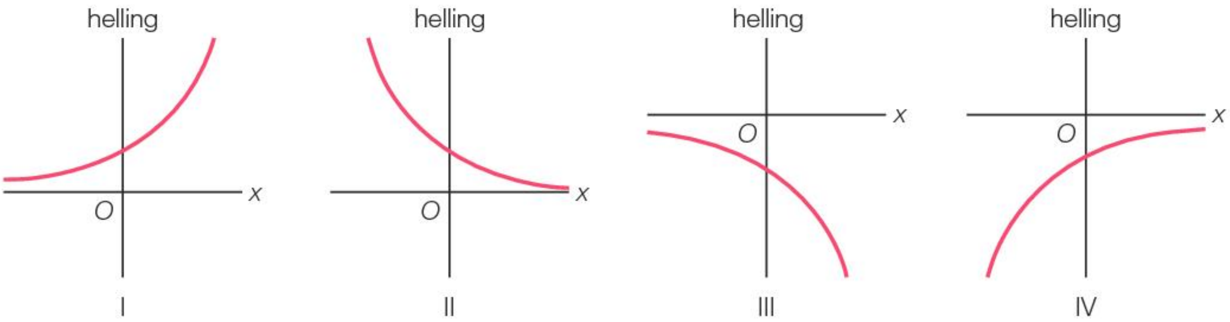


15.3 Hellingen en buigpunten

036 In figuur 15.46 zijn enkele hellinggrafieken getekend.

a Teken bij elke hellinggrafiek een globale grafiek van de oorspronkelijke functie.

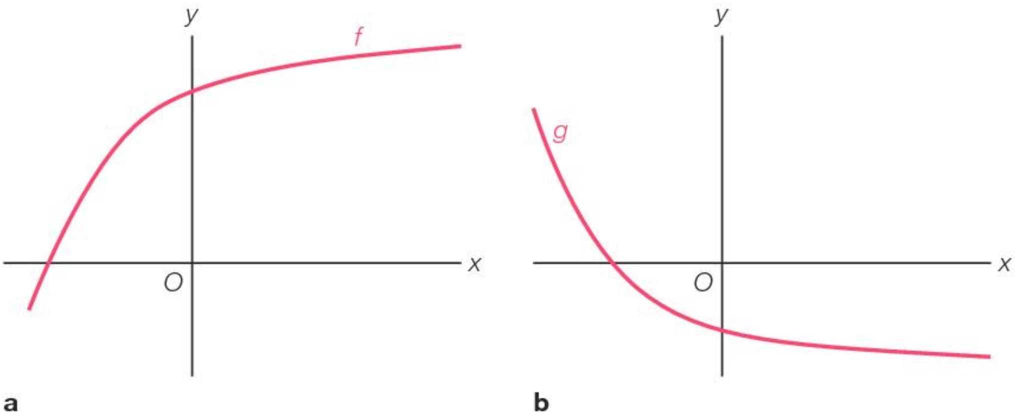
b Bij elke grafiek in figuur 15.46 hoort een hellinggrafiek. Schets deze hellinggrafieken.



figuur 15.46

037 In figuur 15.47a zie je de grafiek van een afnemend stijgende functie f.

a Teken in aparte figuren globale grafieken de functies f' en f''.



figuur 15.47

In figuur 15.47b zie je de grafiek van een afnemend dalende functie g.

b Teken in aparte figuren globale grafieken van de functies g' en g''.

038 Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{2}e^x$.
Aan het functievoorschrift van f'' is te zien dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
Licht dit toe.

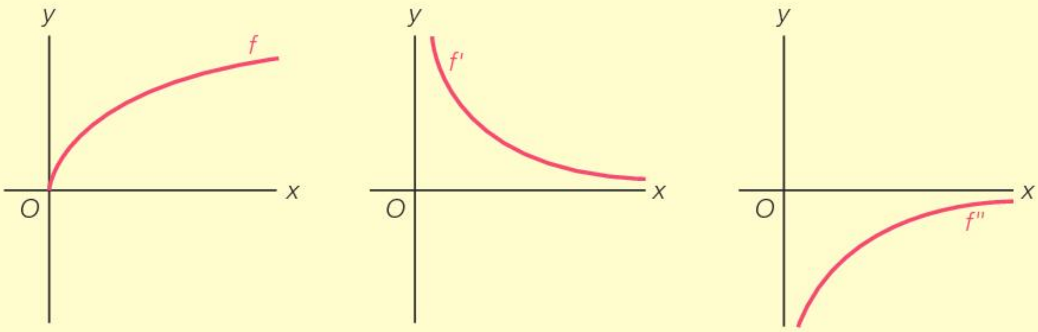
Theorie A Soorten van stijgen en dalen

De afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ is $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Omdat $f'(x) > 0$ voor elke $x > 0$ is de functie f stijgend voor $x > 0$.

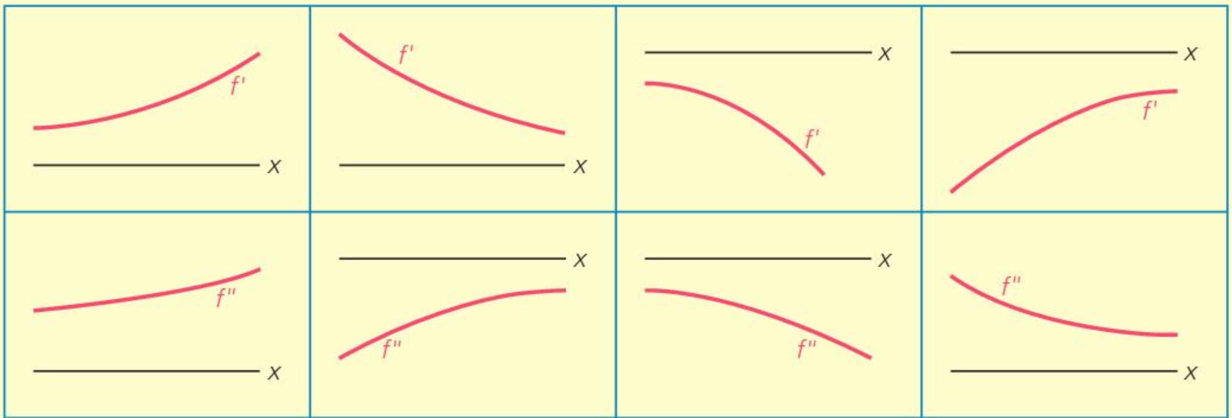
Uit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ volgt $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Omdat $f''(x) < 0$ voor elke $x > 0$ is de functie f' dalend voor $x > 0$.
Dit betekent dat de helling van de grafiek van f steeds kleiner wordt.
Omdat de grafiek van f stijgend is en de grafiek van f' dalend is, is de grafiek van f dus afnemend stijgend.
In figuur 15.48 zijn de grafieken van f, f' en f'' geschetst.



figuur 15.48

Je kunt dus aan de grafieken van de afgeleide f' en de tweede afgeleide f'' zien welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van f hoort.



$f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ dus f is toenemend stijgend	$f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$ dus f is afnemend stijgend	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$ dus f is toenemend dalend	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$ dus f is afnemend dalend

Is de functie $f(x) = \sqrt{x}$ gegeven met de formule $y = \sqrt{x}$, dan noteren we $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $y'' = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$. Ook de notaties met $y'(x)$ en $y''(x)$ komen voor.

Met de d-notatie wordt de afgeleide van $y = \sqrt{x}$ genoteerd als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en de tweede afgeleide als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Bij de formule $N = t + 0{,}1\,\mathrm{e}^t$ krijg je $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 1 + 0{,}1\,\mathrm{e}^t$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right) = 0{,}1\,\mathrm{e}^t$.

Voorbeeld

De hoeveelheid zout Z in een zoutoplossing wordt beschreven door de formule $Z = 1000(1 + 4\,\mathrm{e}^{-0{,}005t})$. Hierin is Z in kg en t in seconden.
Toon algebraïsch aan dat Z een afnemend dalende functie van t is.

Aanpak

Bereken $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right)$. Gebruik: als $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} < 0$ voor elke t dan is Z dalend.
Als bovendien $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right) > 0$ voor elke t dan is Z afnemend dalend.

Uitwerking

$Z = 1000(1 + 4\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}) = 1000 + 4000\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}$ geeft

$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = 4000\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} \cdot -0{,}005 = -20\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}$ en

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right) = -20\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} \cdot -0{,}005 = 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}$

Omdat voor elke t geldt $\mathrm{e}^{-0{,}005t} > 0$, is $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} < 0$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right) > 0$.

Dus Z is een afnemend dalende functie van t.

39 Gegeven is de functie $f(x) = x + \sqrt{x}$.
Toon algebraïsch aan dat f een afnemend stijgende functie is.

40 De temperatuur van een afkoelend voorwerp wordt beschreven met het model $T = 20 + 80\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in minuten.
Toon algebraïsch aan dat het afkoelingsproces steeds langzamer verloopt.

41 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van daling er is in het punt $A(1, 8)$.

42 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van stijgen of dalen er is in de punten A, B en C van de grafiek van f met $x_A = -3$, $x_B = 0$ en $x_C = 1$.

A43 In een vat zit 100 liter water. Bij kantelen van het vat stroomt de inhoud weg. Hierbij hoort de formule $V = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2}$. Hierin is V de resterende hoeveelheid water in het vat in liter en t de tijd in minuten.

a Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de helft van de inhoud is weggestroomd.

b Onderzoek algebraïsch of de uitstroomsnelheid op $t = 7$ toe- of afneemt.

c Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de uitstroomsnelheid maximaal is. Rond af op gehelen.

d Hoeveel seconden na het in vraag c berekende tijdstip is de uitstroomsnelheid afgenomen tot de helft van de maximale uitstroomsnelheid?

O44 Toon aan dat de grafiek van de functie $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ bij $x = 2\frac{1}{2}$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Theorie B Buigpunten en soorten van stijgen en dalen

In een buigpunt gaat een grafiek

- over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend of
- over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend of
- over van afnemend dalend naar toenemend dalend of
- over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Voorbeeld

Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafiek van $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$ in het punt (2, 10) overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Uitwerking

$f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 4x + 5$ en $f''(x) = 6ax + 4$.

Er moet gelden $f''(2) = 0$, dus $12a + 4 = 0$

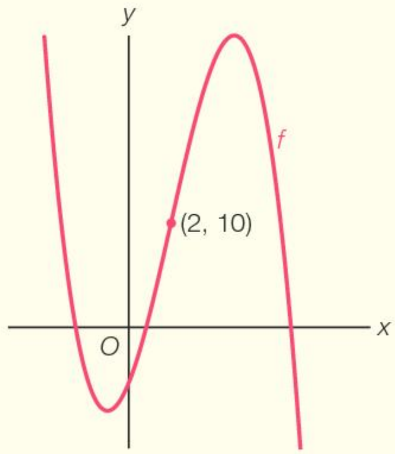
$a = -\frac{1}{3}$

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + b$

$f(2) = 10$ geeft $-\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + b = 10$

$b = -5\frac{1}{3}$

De grafiek van f gaat voor $a = -\frac{1}{3}$ en $b = -5\frac{1}{3}$ in het punt (2, 10) over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.



R45 In de uitwerking van het voorbeeld is een schets opgenomen. Licht toe waarom dat nodig is.

46 De grafiek van $f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$ gaat in het punt $A(3, 5)$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

a Bereken a en b exact.

b Bereken exact in welk punt de grafiek overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

47 Bereken exact voor welke p de grafiek van de functie $f_p(x) = \dfrac{10}{x^2 + p}$ bij $x = 2$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

A48 Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = (x^2 + ax)\,e^x$.

a Bereken exact voor welke a de functie f_a een maximum heeft voor $x = -3$ en bereken exact voor deze a het minimum van f_a.

b Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a bij $x = -4$ overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

A49 Voor elke a en b is gegeven de functie $f_{a,b}(x) = ax\,e^{bx}$.

Het punt $\left(-2, -\dfrac{4}{e}\right)$ is een top is van de grafiek van $f_{a,b}$.

Bereken exact in welk punt de grafiek van $f_{a,b}$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

O50 Gegeven is de formule $y = 2x^p$ met $x > 0$.

a Schets de grafieken van $y = 2x^{1\frac{1}{4}}$ en $y = 2x^{\frac{3}{4}}$ in één figuur.

b Voor welke waarden van p is de grafiek van $y = 2x^p$ afnemend stijgend? Licht toe.

Theorie C Evenredige en omgekeerd evenredige grootheden

Grootheid P is **evenredig** met grootheid Q als er een getal a bestaat waarvoor $P = aQ$. Hierin is a de **evenredigheidsconstante**.
In opgave 50 is y evenredig met x^p met evenredigheidsconstante 2.
Je zag dat voor $x > 0$ de grafiek van $y = 2x^p$ afnemend stijgend is voor $0 < p < 1$.

De grootheden R en S zijn **omgekeerd evenredig** als er een getal a bestaat waarvoor $R = \dfrac{a}{S}$.
Is gegeven dat y omgekeerd evenredig is met $x\sqrt{x}$ dan geldt $y = \dfrac{a}{x\sqrt{x}}$.
Is verder gegeven dat $y = 3$ hoort bij $x = 25$, dan kun je de evenredigheidsconstante a berekenen.

Uit $y = \dfrac{a}{x\sqrt{x}}$ volgt $a = x\sqrt{x} \cdot y$.
$x = 25$ en $y = 3$ geeft $a = 25\sqrt{25} \cdot 3 = 375$.
Dus de formule is $y = \dfrac{375}{x\sqrt{x}}$.

R51 Zie de theorie met de formule $y = \dfrac{375}{x\sqrt{x}}$.
Toon algebraïsch aan dat y afnemend dalend is.

52 Gegeven is dat y evenredig is met $x\sqrt{x}$.
Voor $x = 25$ is $y = 3$.
Stel de formule op van y en toon algebraïsch aan dat y toenemend stijgend is.

53 Het aantal hartslagen H per minuut van een zoogdier is omgekeerd evenredig met $W^{0{,}25}$. Hierin is W het gewicht in kg.
Bij een paard van 750 kg is de hartslag 40 slagen per minuut.

a Stel de formule op van H. Rond de evenredigheidsconstante af op gehelen.

Ga in de rest van deze opgave uit van de formule $H = \dfrac{210}{W^{0{,}25}}$.

b Een konijn heeft een hartslag van 200 slagen per minuut.
Bereken het gewicht in kg. Rond af op één decimaal.

c Toon algebraïsch aan dat H een afnemend dalende functie van W is.

54 Het energieverbruik E van een zoogdier is evenredig met $G^{-0{,}4}$. Hierin is E in joule per gram per km en G het lichaamsgewicht in gram.
Toon algebraïsch aan dat E een afnemend dalende functie van G is.

55 Bekend is dat de geluidssterkte L omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand d tot de geluidsbron. Hierbij is L in een geschikte eenheid en d in meters.

a Daniëlle krijgt bij een concert last van haar oren en gaat drie keer zover van de luidsprekers staan.
Welke invloed heeft dat op de geluidssterkte die zij waarneemt?

b Toon algebraïsch aan dat als de afstand tot een geluidsbron toeneemt, de afname van de geluidssterkte afneemt.

A56 De gemiddelde afstand A van een planeet tot de zon in miljoenen km is evenredig met een macht van de omwentelingstijd T rond de zon in dagen.
Voor Venus geldt $A = 108$ en $T = 225$ en voor Saturnus geldt $A = 1427$ en $T = 10\,753$.

a Stel de formule van A op. Rond hierin af op drie decimalen.

Ga in de rest van deze opgave uit van de formule $A = 2{,}91T^{\frac{2}{3}}$.

b Toon op algebraïsche wijze aan dat A een afnemend stijgende functie van T is.

c De gemiddelde afstand van de planeet Uranus tot de zon is 19,3030 AE.
Bereken de omwentelingstijd van Uranus. Geef het antwoord in jaren en rond af op één decimaal. Gebruik 1 AE = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.

A57 Een vliegtuig ondervindt twee soorten weerstand.

- De luchtweerstand W_l in newton die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.
- De inductieweerstand W_i in newton die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.

Een Boeing 747 ondervindt bij een snelheid van 720 km/uur een luchtweerstand van 120 000 N en een inductieweerstand van 300 000 N. Onderzoek algebraïsch of bij minimale totale weerstand geldt $W_l = W_i$.

A58 Bij een milieuongeval stroomt giftig afvalwater in een rivier. Voor de eerste tien uur na het begin van het ongeval is de hoeveelheid H die per uur wegstroomt evenredig met $\dfrac{\ln(2t+1)}{2t+1}$. Hierbij is t de tijd in uren en H in m^3 per uur.

Het blijkt dat H maximaal 10 000 is geweest.

a Stel de formule van H op.

b Bereken $\left[\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]_{t=2}$ en geef hiervan de praktische betekenis.

Terugblik

Soorten van stijgen en dalen

Is van de functie $y = f(x)$ op het interval $\langle a, b\rangle$ de afgeleide $f'(x) > 0$ en ook de tweede afgeleide $f''(x) > 0$, dan is f toenemend stijgend op $\langle a, b\rangle$.
Zo kun je ook de andere soorten van stijgen en dalen afleiden uit het positief of negatief zijn van de afgeleide en de tweede afgeleide.

Om te onderzoeken met welke soort van stijgen of dalen je bij de functie $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ te maken hebt voor $x = 2$, bereken je $f'(2)$ en $f''(2)$.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ en $f''(x) = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

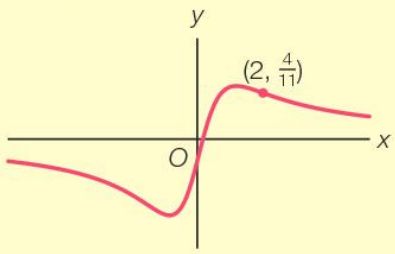
Dit geeft $f'(2) = -0{,}12 < 0$ en $f''(2) = 0{,}032 > 0$, dus de grafiek van f is afnemend dalend voor $x = 2$.

In een buigpunt gaat een grafiek over van de ene soort stijgen in de andere soort stijgen of van de ene soort dalen in de andere soort dalen.

Om te berekenen voor welke waarde van a de grafiek van $f_a(x) = \dfrac{x+a}{x^2+1}$ voor $x = 2$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend, los je de vergelijking $f_a''(2) = 0$ op.

$f_a(x) = \dfrac{x+a}{x^2+1}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{-x^2-2ax+1}{(x^2+1)^2}$ en $f_a''(x) = \dfrac{2x^3+6ax^2-6x-2a}{(x^2+1)^3}$

$f_a''(2) = 0$ geeft $2 \cdot 2^3 + 6a \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2a = 0$ en dit geeft $a = -\frac{2}{11}$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f_{-\frac{2}{11}}$.
Je ziet dat de grafiek in het buigpunt $(2, \frac{4}{11})$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.



Evenredige en omgekeerd evenredige grootheden

Grootheid A is evenredig met grootheid B als er een getal a bestaat waarvoor $A = aB$. Hierin is a de evenredigheidsconstante.
Is gegeven dat y evenredig is met e^{-2x}, dan geldt dus $y = a\,e^{-2x}$.
Is bovendien gegeven dat bij $x = 1$ hoort $y = 10$, dan is de evenredigheidsconstante te berekenen.
Je krijgt $ae^{-2} = 10$, dus $a = 10e^2$ en de formule is $y = 10e^2 \cdot e^{-2x}$.

De grootheden A en B zijn omgekeerd evenredig als er een getal a bestaat waarvoor $A = \dfrac{a}{B}$.
Is gegeven dat N omgekeerd evenredig is met $t^2\sqrt{t}$, dan geldt $N = \dfrac{a}{t^2\sqrt{t}}$.
Is bovendien gegeven dat bij $t = 4$ hoort $N = 250$, dan is $a = 8000$ en dus $N = \dfrac{8000}{t^2\sqrt{t}}$.

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

059 Hieronder staan twee beweringen, waarvan er één juist is.
Welke? Licht toe.
I $y = \sqrt{2x-3}$ is een primitieve van $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}$.
II $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}$ is een primitieve van $y = \sqrt{2x-3}$.

Theorie A Regels voor het primitiveren

De functie F is een primitieve van de functie f als $F' = f$.
Hieronder staan de belangrijkste regels voor het primitiveren.

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = a \cdot \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = \mathrm{e}^x + c$
$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$
$f(x) = \sin(x)$ geeft $F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$ geeft $F(x) = \sin(x) + c$
De primitieven van $f(ax+b)$ zijn $\dfrac{1}{a}F(ax+b) + c$.

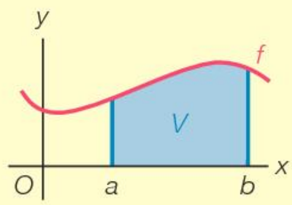
Om de functie $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+1}$ te primitiveren schrijf je het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$.

Je krijgt $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+1} = \dfrac{1\frac{1}{2}(2x+1) - 1\frac{1}{2} + 4}{2x+1} = 1\frac{1}{2} + \dfrac{2\frac{1}{2}}{2x+1}$,

dus $F(x) = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}\ln|2x+1| + c$.

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$ is

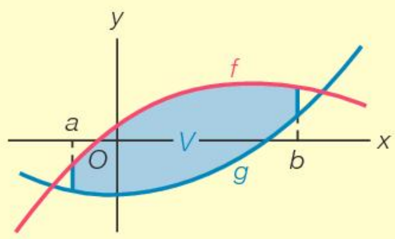
$$O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$



figuur 15.49

De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is

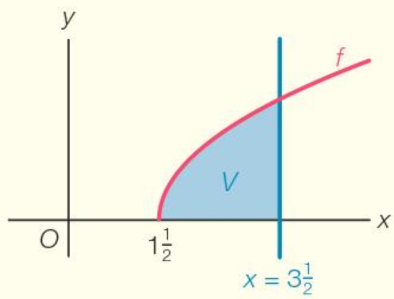
$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$



figuur 15.50

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x - 3}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3\frac{1}{2}$.
Bereken exact de oppervlakte van V.



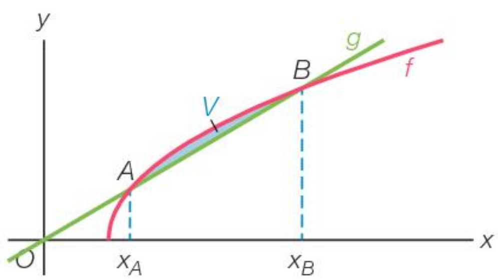
figuur 15.51

Uitwerking

$$O(V) = \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} \sqrt{2x - 3}\,\mathrm{d}x = \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} (2x - 3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}(2x - 3)^{1\frac{1}{2}}\right]_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}}$$

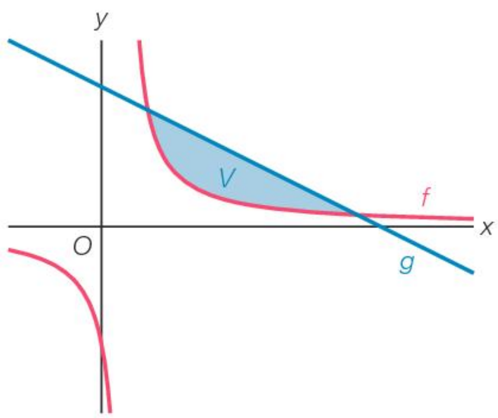
$$= \left[\tfrac{1}{3}(2x - 3)\sqrt{2x - 3}\right]_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 0 = 2\tfrac{2}{3}$$

60 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ van het voorbeeld en verder de functie $g(x) = \frac{1}{2}x$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de oppervlakte van V.



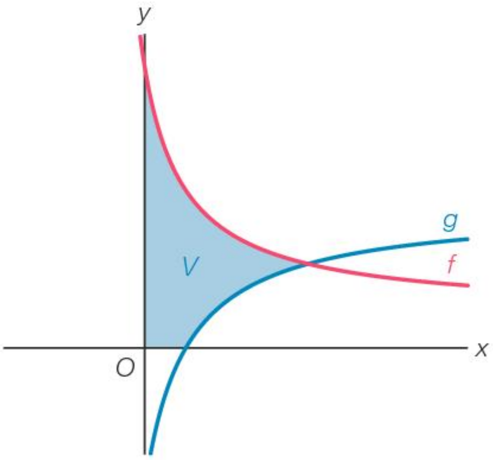
figuur 15.52

61 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{5}{4x - 2}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de oppervlakte van V.



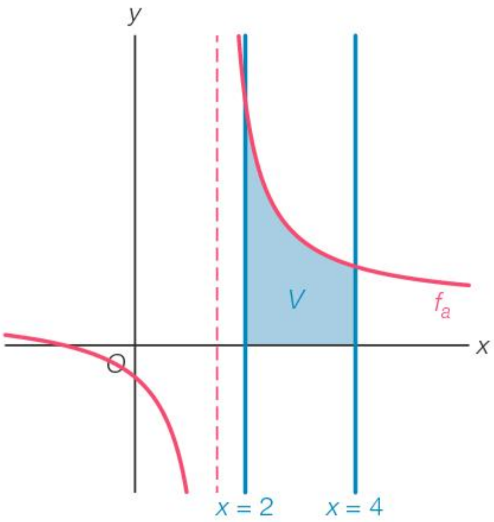
figuur 15.53

62 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x+8}{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{4x-4}{x+1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g, de x-as en de y-as.
Bereken exact de oppervlakte van V.



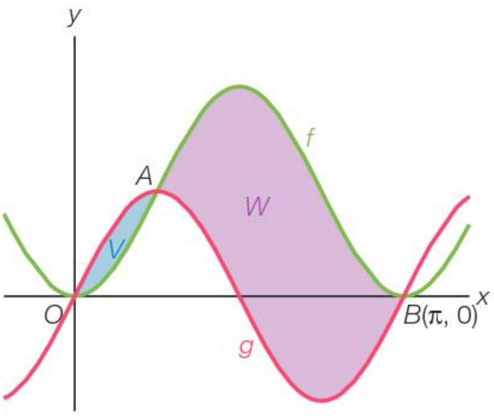
figuur 15.54

A63 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{ax+4}{2x-3}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de x-as en de lijnen $x = 2$ en $x = 4$.
Zie figuur 15.55.
Bereken met behulp van primitiveren voor welke waarde van a de oppervlakte van V gelijk is aan 10. Rond af op twee decimalen.



figuur 15.55

A64 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin^2(x)$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $O(0, 0)$, A en $B(\pi, 0)$ en sluiten de vlakdelen V en W in zoals in figuur 15.56.
Bereken exact $O(V) + O(W)$.

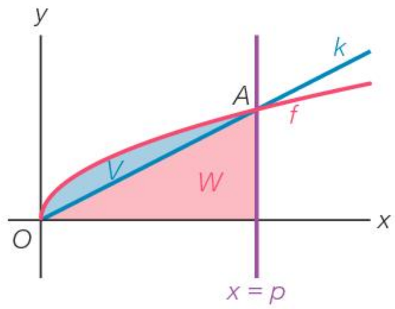


figuur 15.56

O65

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A.
De lijn k is de lijn door O en A. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en k. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de lijnen k, $x = p$ en de x-as. Zie figuur 15.57.
Voor de oppervlakte $O(V + W)$ van de vlakdelen V en W geldt $O(V + W) = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$.

a Bewijs dit.
b Druk de oppervlakte $O(W)$ van het vlakdeel W uit in p.
c Druk de oppervlakte $O(V)$ van het vlakdeel V uit in p.
d Bewijs dat geldt $O(V) : O(W) = 1 : 3$.



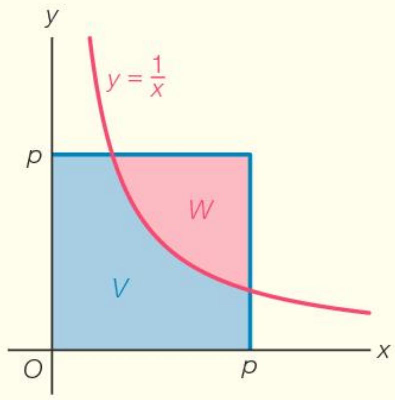
figuur 15.57

Theorie B Verhouding van oppervlakten

In opgave 65 is de verhouding van de oppervlakten van de vlakdelen V en W onafhankelijk van de waarde van p.
In het voorbeeld zoeken we een waarde van p zodat twee oppervlakten zich verhouden als 1 : 2.

Voorbeeld

In figuur 15.58 is een vierkant met zijde p, met $p > 1$, getekend waarvan een hoekpunt in de oorsprong ligt en twee zijden langs de assen vallen. De grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ verdeelt het vierkant in de vlakdelen V en W.
Bereken met behulp van primitiveren de waarde van p waarbij geldt $O(W) : O(V) = 1 : 2$. Rond af op twee decimalen.



figuur 15.58

Uitwerking

De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt $\left(\dfrac{1}{p}, p\right)$.

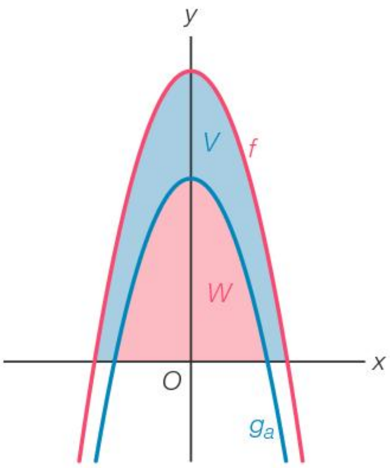
$$O(V) = \frac{1}{p} \cdot p + \int_{\frac{1}{p}}^{p} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1 + \left[\ln|x|\right]_{\frac{1}{p}}^{p} = 1 + \ln(p) - \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= 1 + \ln(p) - \ln(p^{-1}) = 1 + \ln(p) + \ln(p) = 1 + 2\ln(p)$$

$O(V + W) = p^2$
$O(W) : O(V) = 1 : 2$, dus $O(V) = \frac{2}{3}O(V + W)$.
Dit geeft $1 + 2\ln(p) = \frac{2}{3}p^2$.
Voer in $y_1 = 1 + 2\ln(x)$ en $y_2 = \frac{2}{3}x^2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}72$ en $x \approx 1{,}81$.
$p \approx 0{,}72$ voldoet niet, dus $p \approx 1{,}81$.

66 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Bereken de waarde van p waarbij geldt $O(V) = O(W)$.
Rond af op twee decimalen.

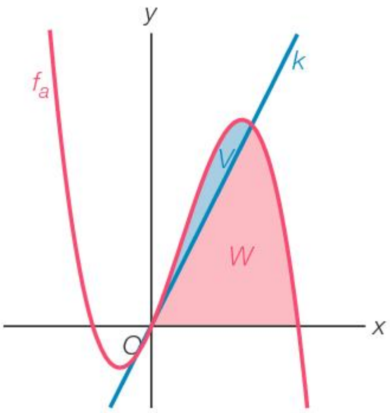
67 Gegeven zijn de functies $f(x) = 9 - x^2$ en $g_a(x) = a - x^2$ met $0 < a < 9$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g_a en de x-as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van g_a en de x-as. Zie figuur 15.59.
Bereken algebraïsch voor welke a geldt $O(V) = O(W)$.
Rond af op twee decimalen.



figuur 15.59

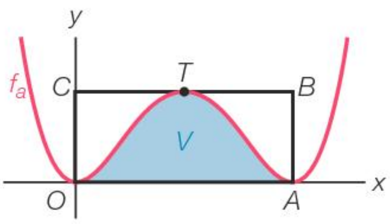
68 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$.
De lijn k raakt de grafiek van f_a in de oorsprong en verdeelt het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de positieve x-as in de vlakdelen V en W. Zie figuur 15.60.

a Neem $a = 3\frac{1}{3}$ en bereken exact de oppervlakte van W.
b Bewijs dat de oppervlakte van V onafhankelijk is van a.



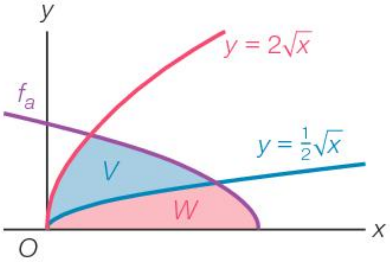
figuur 15.60

69 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \frac{1}{4}x^2(x - a)^2$.
De gemeenschappelijke punten van de grafiek van f_a met de x-as zijn $O(0, 0)$ en $A(a, 0)$. De top T van de grafiek van f_a ligt op de zijde BC van de rechthoek $OABC$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de x-as. Zie figuur 15.61.
Bewijs dat de verhouding van de oppervlakte van V en de oppervlakte van de rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van a en bereken deze verhouding.



figuur 15.61

A70 Voor elke $a > 1$ is gegeven de functie $f_a(x) = \sqrt{a - x}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de krommen $y = 2\sqrt{x}$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de kromme $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ en de x-as. Zie figuur 15.62.
Bewijs dat voor elke $a > 1$ geldt dat $O(V) = O(W)$.



figuur 15.62

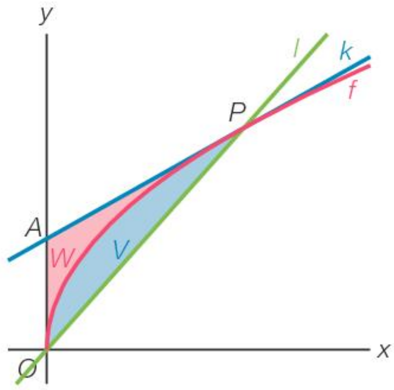
A71 □⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in een punt $P(p^2, 2p)$ met $p > 0$.

Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{p} \cdot x + p$.

a Bewijs dit.

Lijn k snijdt de y-as in het punt A.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn l door O en P.
W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, lijn k en de y-as. Zie de figuur hiernaast.

b Bewijs dat $O(W) : O(V) = 1 : 2$.

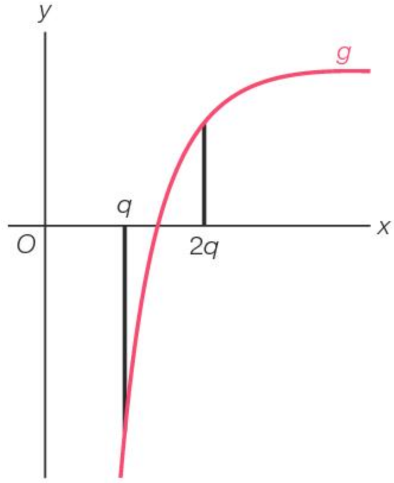


figuur 15.63

A72 ✱ Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2)$ en $g(x) = f'(x)$.

Er is een waarde van q waarvoor geldt $\int_q^{2q} g(x)\,dx = 0$.

Voor deze waarde van q is de situatie in figuur 15.64 geschetst.
Bereken exact deze waarde van q. Schrijf het antwoord in de vorm $q = \frac{1}{ae}$, waarbij a een getal is.



figuur 15.64

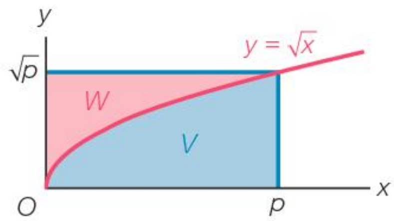
O73 □⊙✱ Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = p$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{x}$, de y-as en de lijn $y = \sqrt{p}$. Zie figuur 15.65.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.
Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.

Voor de inhoud $I(L)$ van L geldt $I(L) = \pi\int_0^p (f(x))^2\,dx$.

a Bewijs dat $I(L) = \frac{1}{2}\pi p^2$.

b Bewijs dat $I(M) = \frac{1}{5}\pi p^2 \cdot \sqrt{p}$.

c Bereken exact voor welke p geldt dat $I(L) = I(M)$.

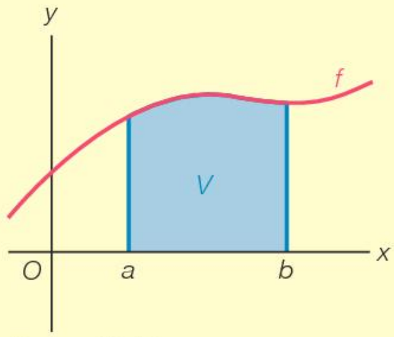


figuur 15.65

Theorie C Wentelen om de *x*-as en om de *y*-as

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.66 om de x-as wentelt is

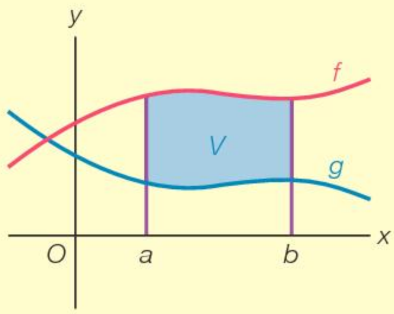
$$I(L) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$



figuur 15.66

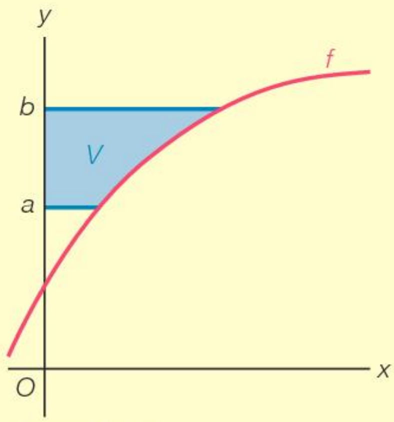
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.67 om de x-as wentelt is

$$I(L) = \pi\int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx.$$



figuur 15.67

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.68 om de y-as wentelt is $I(L) = \pi\int_a^b x^2\,dy$.

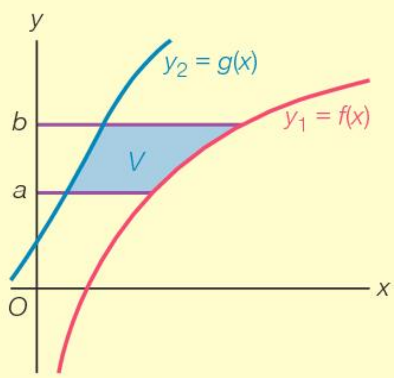


figuur 15.68

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.69 om de y-as wentelt is

$$I(L) = \pi\int_a^b ((x_1)^2 - (x_2)^2)\,dy.$$

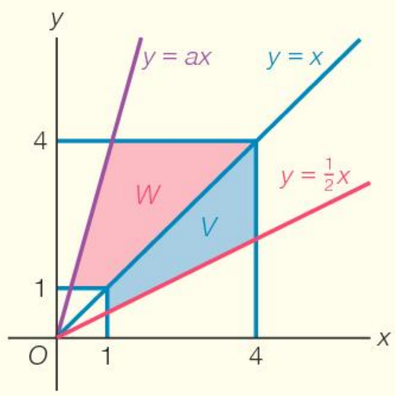
Je vindt x_1 door bij de formule van y_1 de variabele x vrij te maken.



figuur 15.69

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$ en $y = ax$ met $a > 1$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 1$ en $x = 4$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = ax$, $y = 1$ en $y = 4$. Zie figuur 15.70.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.
Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.
Bereken exact voor welke a geldt $I(M) = 1\frac{1}{5}I(L)$.



figuur 15.70

Uitwerking

$$I(L) = \pi\int_1^4 (x^2 - (\tfrac{1}{2}x)^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 (x^2 - \tfrac{1}{4}x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_1^4 \tfrac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{4}x^3\right]_1^4 = \pi(\tfrac{1}{4}\cdot 4^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^3) = \pi(16 - \tfrac{1}{4}) = 15\tfrac{3}{4}\pi$$

$y = x$ geeft $x^2 = y^2$ en $y = ax$ geeft $x = \dfrac{y}{a}$, dus $x^2 = \dfrac{y^2}{a^2}$.

$$I(M) = \pi\int_1^4 \left(y^2 - \frac{y^2}{a^2}\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{1}{3}y^3 - \frac{y^3}{3a^2}\right]_1^4 = \pi\left(\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{4^3}{3a^2} - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1^3}{3a^2}\right)\right)$$
$$= \pi\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{3a^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3a^2}\right) = \pi\left(\frac{63}{3} - \frac{63}{3a^2}\right) = \left(21 - \frac{21}{a^2}\right)\pi$$

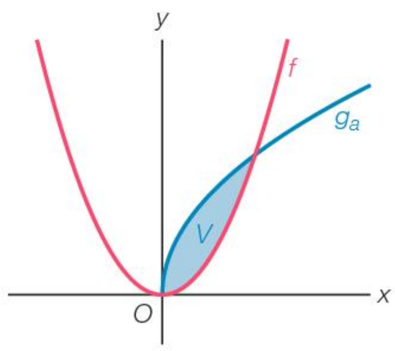
Er geldt $\left(21 - \dfrac{21}{a^2}\right)\pi = 1\frac{1}{5}\cdot 15\frac{3}{4}\pi$ oftewel $21 - \dfrac{21}{a^2} = 18\frac{9}{10}$

$$\frac{21}{a^2} = 2\tfrac{1}{10}$$
$$a^2 = 10$$
$$a = \sqrt{10} \vee a = -\sqrt{10}$$

$a > 1$, dus $a = \sqrt{10}$.

R74
Zie het voorbeeld.
Ben wil berekenen voor welke a geldt $I(M) = 1\frac{2}{5}I(L)$.
a Waarom lukt dit niet?
b Lukt $I(M) = 1\frac{3}{10}I(L)$ wel? Licht toe.

75
Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g_a(x) = a\sqrt{x}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g_a. Zie figuur 15.71.
a Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 10.
b Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Bereken exact voor welke a de inhoud van L gelijk is aan 30π. Schrijf het antwoord in de vorm $a = \sqrt[q]{n}$, met n en q gehele getallen.

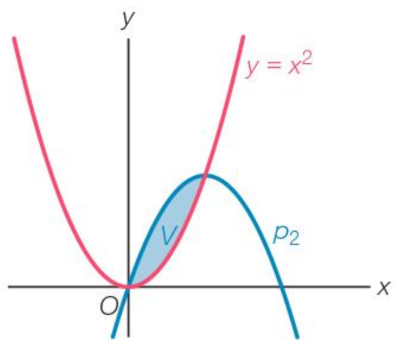


figuur 15.71

76 Gegeven is de parabool p_1: $y = x^2$. Verder is gegeven de parabool p_2 met de volgende eigenschappen:
- p_2 snijdt de x-as in de oorsprong en rechts van de oorsprong
- de top van p_2 ligt op p_1.

Zie figuur 15.72.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de parabolen p_1 en p_2.
Stel de top van p_2 is het punt (t, t^2).
Dan geldt p_2: $y = -x^2 + 2tx$.

a Bewijs dit.
b Bereken exact voor welke waarde van t de oppervlakte van V gelijk is aan 10.
c Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Bereken exact voor welke waarde van t de inhoud van L gelijk is aan 100π.



figuur 15.72

A77 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.
De lijn $y = a$ met $a > 1$ snijdt de grafiek van f in het punt A. De lijn k is de verticale lijn door A. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn k, de x-as en de y-as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $y = a$ en de y-as.
Zie figuur 15.73.

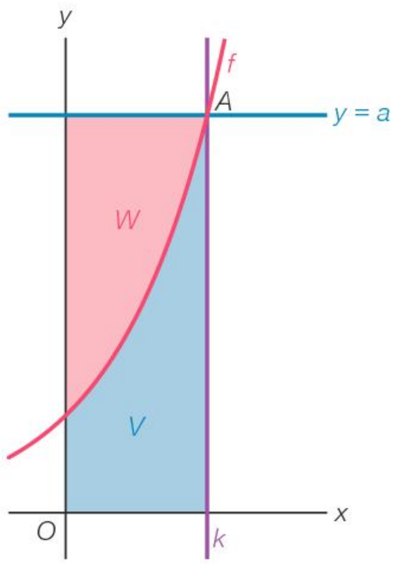
a Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W. Rond af op twee decimalen.

Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.
Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de x-as.

b Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de inhoud van L gelijk is aan de inhoud van M. Rond af op twee decimalen.

In vraag d gebruik je dat $G(x) = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x$ een primitieve is van $g(x) = \ln^2(x)$.

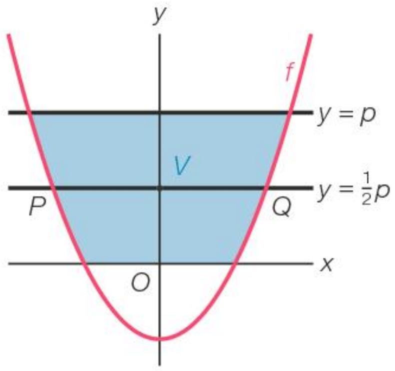
c Bewijs dat deze primitieve juist is.
d Het lichaam N ontstaat als W wentelt om de y-as. Bereken met behulp van primitiveren voor welke waarde van a de inhoud van L zes keer zo groot is als de inhoud van N. Rond af op twee decimalen.



figuur 15.73

A78

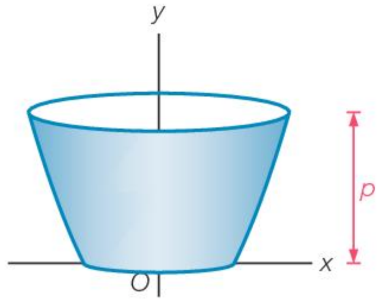
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.
De grafiek van f snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}p$ met $p > 0$ in de punten P en Q. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijn $y = p$. Zie de figuur hiernaast.
Door het lijnstuk PQ om de y-as te wentelen, ontstaat een cirkelschijf met oppervlakte A.



figuur 15.74

Door V om de y-as te wentelen, ontstaat een zogenaamde afgeknotte paraboloïde met hoogte p. Zie figuur 15.75.
Voor de inhoud I van de afgeknotte paraboloïde geldt de formule $I = p \cdot A$.

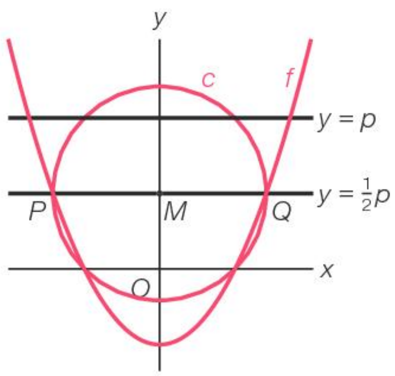
a Bewijs dat deze formule juist is.



figuur 15.75

De cirkel c heeft middelpunt $M(0, \frac{1}{2}p)$ en gaat door P en Q. Zie de figuur hiernaast.
Door c om de y-as te wentelen, ontstaat een bol.

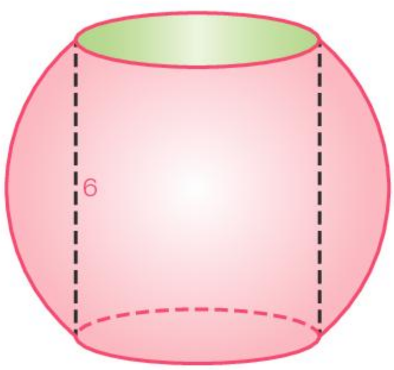
b Bereken algebraïsch de straal van de bol in het geval de inhoud van de bol gelijk is aan de inhoud van de afgeknotte paraboloïde. Rond af op twee decimalen. Gebruik dat de inhoud van een bol met straal r gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.



figuur 15.76

E79

Recht door het midden van een massieve bol is een cilindervormig gat geboord met lengte zes. In de figuur hiernaast zie je een tekening van de situatie.
Bereken de inhoud van het deel van de bol dat er overblijft.

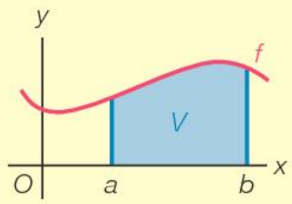


figuur 15.77

Terugblik

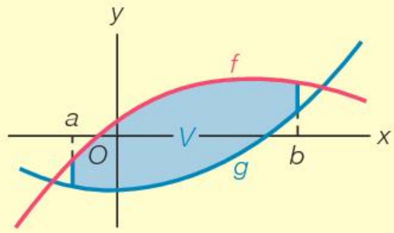
Verhouding van oppervlakten

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$ is



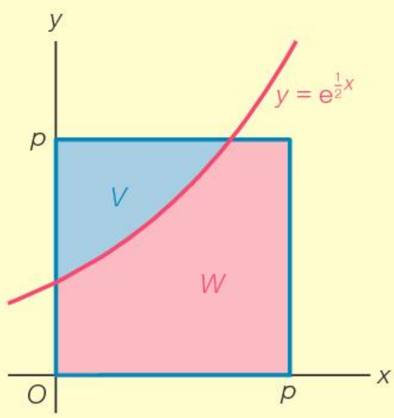
$$O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is



$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

De grafiek van $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ verdeelt het vierkant met zijde p, met $p > 1$, in de figuur hiernaast in de vlakdelen V en W.
Er geldt $O(V) : O(W) = 1 : 3$. Hieruit volgt $O(V) = \frac{1}{4}p^2$.
Snijden van de lijn $y = p$ met de grafiek van $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ geeft $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = p$, dus $x = 2\ln(p)$.

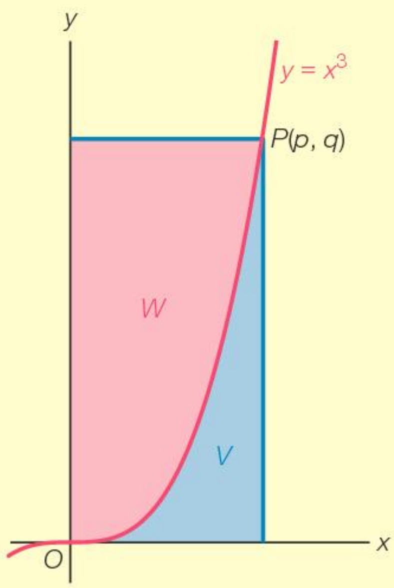


$$O(V) = \int_0^{2\ln(p)} (p - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \left[px - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(p)}$$
$$= 2p\ln(p) - 2p + 2$$

$O(V) = \frac{1}{4}p^2$ geeft $2p\ln(p) - 2p + 2 = \frac{1}{4}p^2$
Invoeren van $y_1 = 2x\ln(x) - 2x + 2$ en $y_2 = \frac{1}{4}x^2$ en de optie snijpunt geeft $x \approx 2{,}47$. Dus $p \approx 2{,}47$.

Wentelen om de x-as en om de y-as

Het punt $P(p, q)$ met $p > 0$ ligt op de grafiek van $y = x^3$.
In de figuur hiernaast zie je ook de vlakdelen V en W.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.
Om te berekenen voor welke p geldt dat $I(L) = I(M)$ los je de vergelijking $\pi\int_0^p y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^q x^2\,\mathrm{d}y$ op.

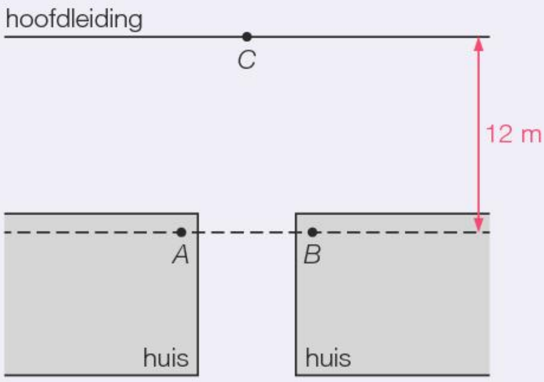


Omdat geldt $q = p^3$ en $x = y^{\frac{1}{3}}$, dus $x^2 = y^{\frac{2}{3}}$ krijg je de vergelijking $\int_0^p x^6\,\mathrm{d}x = \int_0^{p^3} y^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y$.

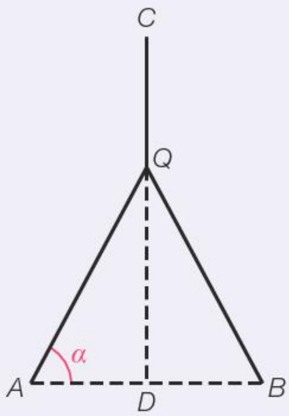
Dit geeft $\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^p = \left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^{p^3}$, dus $\frac{1}{7}p^7 = \frac{3}{5}p^5$ oftewel $\frac{1}{7}p^2 = \frac{3}{5}$.
Je krijgt $p^2 = \frac{21}{5}$, dus $p = \sqrt{4\frac{1}{5}}$.

Eindopdracht Kosten bij waterleidingnet

In de beginopdracht werden in een nieuwbouwwijk huizen aangesloten op het waterleidingnet. In de figuur hiernaast zie je nogmaals de situatie geschetst voor twee huizen. Er geldt $AB = 8$ meter, $AC = BC$ en de lijn door A en B is evenwijdig met de hoofdleiding.



In de beginopdracht heb je vier manieren gezien waarop de verbinding tussen C en de beide huizen tot stand kan worden gebracht. We kijken nog eens naar de vierde mogelijkheid, waarbij vanaf C een leiding naar een punt Q op de symmetrieas CD van driehoek ABC wordt gelegd en vanuit Q vertakkingen naar A en B. Zie de figuur hiernaast.



In de beginopdracht heb je de totale lengte L van de verbinding geminimaliseerd door de afstand tussen C en Q gelijk te stellen aan x, L uit te drukken in x, en vervolgens het minimum van L te berekenen.
Je kunt de minimale lengte van de verbinding ook vinden door de hoek tussen AQ en AB gelijk te stellen aan α, de totale lengte L van de verbinding uit te drukken in α, en vervolgens L te minimaliseren.

- Bereken op deze manier de exacte waarde van deze minimale lengte.

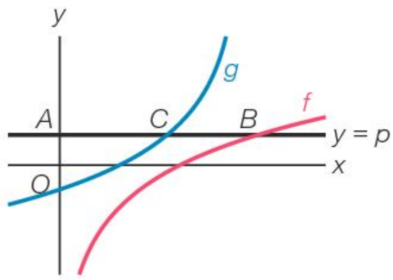
Niet alleen de lengte van de verbinding is voor het waterleidingbedrijf van belang, maar ook de kosten die gepaard gaan met het aanleggen van de leidingen. Het aanleggen van het stuk CQ kost 2000 euro per meter, het aanleggen van de stukken AQ en BQ kost 1500 euro per meter.
Het waterleidingbedrijf wil dat de kosten minimaal zijn.

- Bereken algebraïsch wat in dat geval de lengte van CQ is en hoeveel de genoemde minimale kosten zijn.

Diagnostische toets

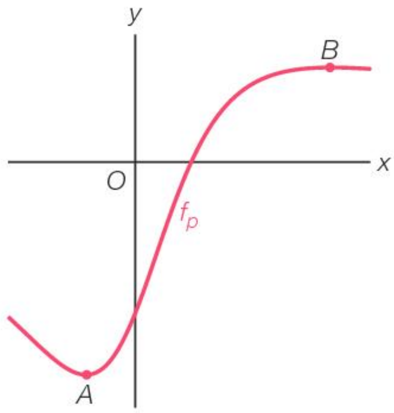
15.1 Lijnstukproblemen

1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(\frac{1}{2}x)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{2}{3-x}\right)$.
De lijn $y = p$ met $p \neq 0$ snijdt de y-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C.
Bereken exact voor welke waarde van p het punt C het midden is van het lijnstuk AB.



figuur 15.78

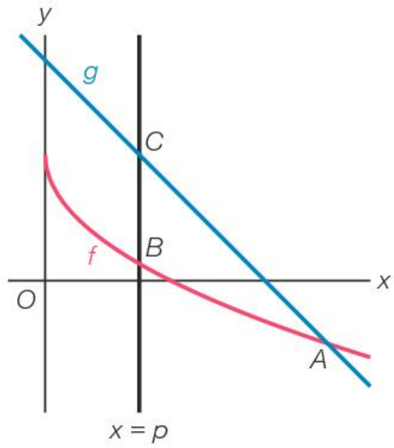
2 Voor elke p is gegeven de functie $f_p(x) = \dfrac{10x-15}{x^2+4} + p$.
De toppen van de grafiek van f_p zijn A en B. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB.



figuur 15.79

15.2 Optimaliseringsproblemen

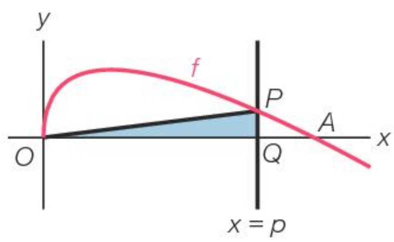
3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - \sqrt{2x}$ en $g(x) = 3\frac{1}{2} - x$.
In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g met het snijpunt A. De lijn $x = p$ met $0 \leq p < x_A$ snijdt de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C.
Bereken exact voor welke p de lengte L van het lijnstuk BC maximaal is.



figuur 15.80

4 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in het punt A. Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < x_A$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x-as. Zie figuur 15.81.

a Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ.



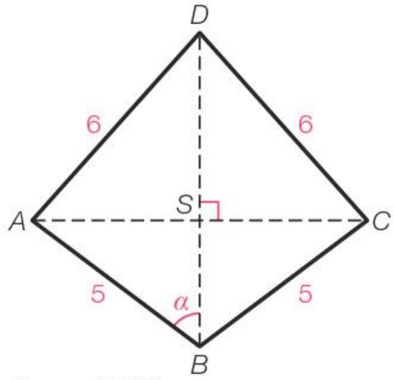
figuur 15.81

Gegeven is verder het punt $B(3, 0)$.
Voor de lengte L van lijnstuk BP geldt
$L = \sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}$.

b Bewijs dat deze formule juist is.

c Bereken met behulp van de afgeleide voor welke p de lengte van het lijnstuk BP minimaal is. Rond af op twee decimalen.

5 Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = 5$ en $CD = AD = 6$. Zie figuur 15.82. Stel $\angle ABD = \alpha$.
Er geldt $BD = 5\cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25\sin^2(\alpha)}$.
- **a** Bewijs dat deze formule juist is.
- **b** Bereken in graden nauwkeurig de waarde van α waarvoor de oppervlakte van $ABCD$ maximaal is.



figuur 15.82

15.3 Hellingen en buigpunten

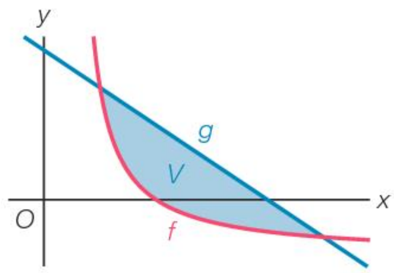
6 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van stijgen of dalen er is in het punt A met $x_A = 1$.

7 Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = (x + a)\,\mathrm{e}^x$.
Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a bij $x = 5$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

8
- **a** Gegeven is dat y evenredig is met $x \cdot \sqrt[3]{x}$. Voor $x = 8$ is $y = 40$.
Stel de formule op van y en toon algebraïsch aan dat y toenemend stijgend is voor $x > 0$.
- **b** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $\mathrm{e}^{0,1x}$. Voor $x = 10$ is $y = 4$.
Stel de formule op van y en onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van stijgen of dalen bij $x = 5$ hoort.

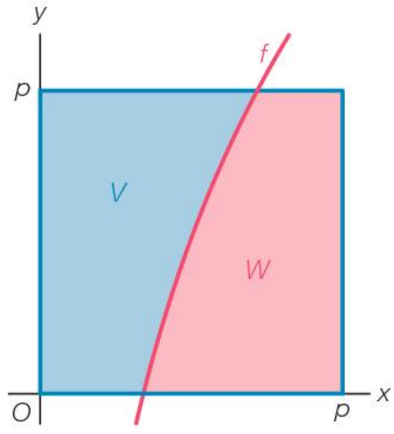
15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

9 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{-2x + 4}{2x - 1}$ en
$g(x) = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de oppervlakte van V.

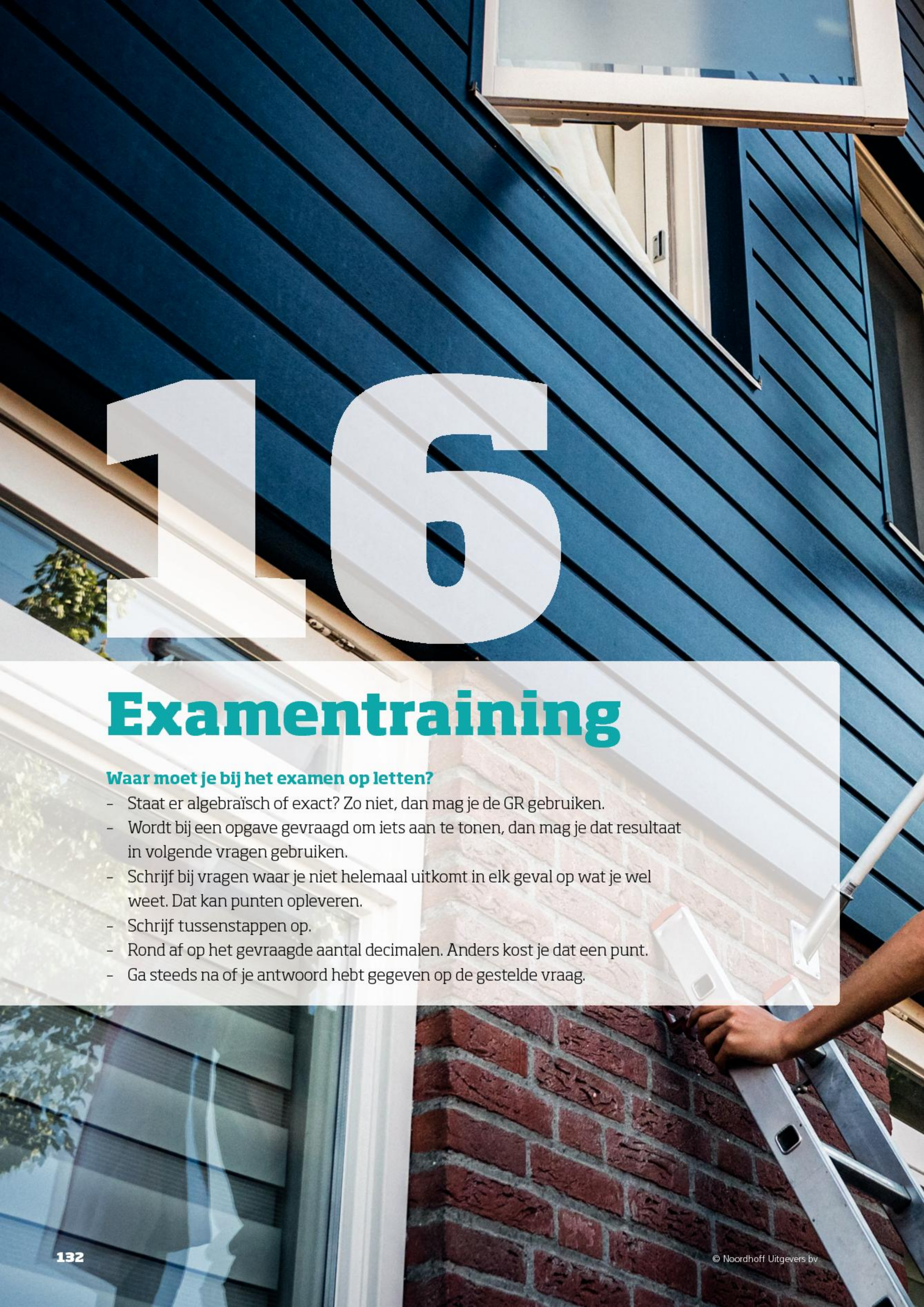


figuur 15.83

10 In figuur 15.84 is een vierkant met zijde p, met $1\frac{1}{2} < p < 8$, getekend waarvan een hoekpunt in de oorsprong ligt en twee zijden langs de assen vallen. De grafiek van de functie $f(x) = 4\ln(x)$ verdeelt het vierkant in de vlakdelen V en W.
- **a** Bereken met behulp van primitiveren voor welke p de vlakdelen V en W gelijke oppervlakte hebben. Rond af op twee decimalen.
- **b** Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de y-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.
Bereken met behulp van primitiveren voor welke p de lichamen L en M gelijke inhoud hebben. Rond af op twee decimalen.



figuur 15.84



16 Examentraining

Waar moet je bij het examen op letten?

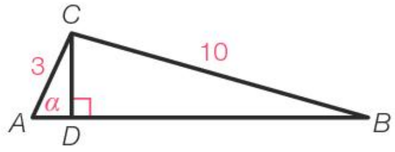
- Staat er algebraïsch of exact? Zo niet, dan mag je de GR gebruiken.
- Wordt bij een opgave gevraagd om iets aan te tonen, dan mag je dat resultaat in volgende vragen gebruiken.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt in elk geval op wat je wel weet. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Rond af op het gevraagde aantal decimalen. Anders kost je dat een punt.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag.

16.1 Algemene vaardigheden

1 **a** Gegeven zijn de formules $P = 23x^2$ en $Q = 36x^3$.
Bereken $\frac{P}{Q}$ in het geval $Q = 50$. Rond af op twee decimalen.

b Los exact op $\frac{10}{3x-5} = 3x - 8$.

c Gegeven is driehoek ABC in figuur 16.1 met $AC = 3$, $BC = 10$ en $\angle A = \alpha$.
Bewijs dat geldt $AB = 3\cos(\alpha) + \sqrt{100 - 9\sin^2(\alpha)}$.



figuur 16.1

d Gegeven zijn de formules $F = \frac{10a}{b^2}$, $a = \frac{c}{2b}$ en $b = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Bewijs dat geldt $F = \frac{5c}{(x^2 + y^2)^{1\frac{1}{2}}}$.

e Gegeven zijn de formules $A^2x = py^2$ en $p^2 = A + B$ met $A > 0$.

Combineer de formules tot $y = A \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{A+B}}$.

f Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{5\sqrt{x+4} - 10}{x}$ en $g(x) = \frac{5}{2 + \sqrt{x+4}}$.

Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt dat $f(x) = g(x)$.

g Tussen t en N bestaat een lineair verband. Verder is gegeven de formule $P(t) = 16N^3$. Er geldt $P(5) = 100$ en $P(8) = 200$.
Stel de formule op van N als functie van t. Rond af op twee decimalen.

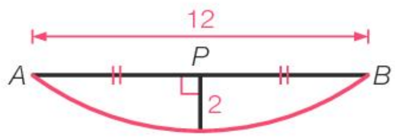
h P is evenredig met Q. Voor $Q = 30$ is $P = 12$. Verder is $Q \cdot R^{\frac{1}{3}} = 10$, $S = \frac{R}{R+1}$ en $T = 50PS$.

Leid hieruit de formule $T = \frac{20\,000Q}{Q^3 + 1000}$ af.

i Gegeven is de formule $N = \frac{100}{\sqrt{x^2 + 17^2}} + \frac{100}{\sqrt{17^2 + (30-x)^2}}$ met

$1 \leq x \leq 29$.
Bereken hoeveel procent het maximum van N meer is dan het minimum van N. Rond af op twee decimalen.

j In de figuur hiernaast zie je het lijnstuk AB met lengte 12 en de cirkelboog AB. Het punt P is het midden van AB en de afstand van P tot de cirkelboog is 2.
Bereken de straal van de cirkel waarvan de boog AB een gedeelte is.



figuur 16.2

Herleiden

- Voor het *wegwerken van de haakjes* in $(3x-1)^2$, $(x^2+4)^2$ en $(x^3-y^2)(x^3+y^2)$ gebruik je de merkwaardige producten.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$2AB$ heet het dubbelproduct van A en B.

$(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
$(x^2+4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$
$(x^3-y^2)(x^3+y^2) = x^6 - y^4$

- De merkwaardige producten heb je soms ook nodig bij het *vereenvoudigen van breuken*, bijvoorbeeld bij de formules $y = \dfrac{x^6-16}{x^3+4}$ en $N = \dfrac{p^4-10p^2+25}{p^4-25}$.

$$y = \frac{x^6-16}{x^3+4} = \frac{(x^3+4)(x^3-4)}{x^3+4} = x^3 - 4 \text{ mits } x \neq \sqrt[3]{-4}$$

$$N = \frac{p^4-10p^2+25}{p^4-25} = \frac{(p^2-5)^2}{(p^2+5)(p^2-5)} = \frac{p^2-5}{p^2+5} \text{ mits } p \neq \sqrt{5} \wedge p \neq -\sqrt{5}$$

- Bij het *herleiden van wortels* gebruik je de volgende rekenregels.

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0$$
$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B > 0$$
$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{54} - \dfrac{8\sqrt{30}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

$\sqrt{\tfrac{8}{9}a^2} = \sqrt{\tfrac{4}{9}a^2 \cdot 2} = \tfrac{2}{3}|a|\sqrt{2}$

$(2a - \sqrt{3})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{3} + 3$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}-\sqrt{20}}{5-2} = \frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3} = 1\tfrac{2}{3}\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}$$

- Bij het *herleiden van vormen met breuken* gebruik je de volgende regels.

Optellen	**Vermenigvuldigen**	**Delen**
$\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$	$A\cdot\frac{B}{C}=\frac{AB}{C}$	$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)}=A\cdot\frac{C}{B}=\frac{AC}{B}$ mits $C\neq 0$
$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$	$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$	$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C}=\frac{A}{BC}$

$$10-\frac{3}{x^2}=\frac{10x^2-3}{x^2}$$

$$\frac{a}{2b}+\frac{5}{b}=\frac{a}{2b}+\frac{10}{2b}=\frac{a+10}{2b}$$

$$\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}=\frac{4(x-1)-3x}{x(x-1)}=\frac{4x-4-3x}{x(x-1)}=\frac{x-4}{x(x-1)}$$

$$\frac{20}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=20\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{20x+20}{x-1}\text{ mits } x\neq -1$$

- Bij het *herleiden van machten* gebruik je de rekenregels voor machten.

$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$(ab)^p=a^pb^p$	$a^0=1$
$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$	$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$	$a^{-1}=\frac{1}{a}$
$(a^p)^q=a^{pq}$	$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$	$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

$$(3x^{\frac{4}{5}})^2=9x^{\frac{8}{5}}=9x^1\cdot x^{\frac{3}{5}}=9x\cdot\sqrt[5]{x^3}$$

$$20^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-2}=\frac{\sqrt{20}}{x^2}=\frac{2\sqrt{5}}{x^2}$$

Vergelijkingen oplossen

Bij het algebraïsch of exact oplossen van vergelijkingen werk je al schrijvend stap voor stap naar de oplossing toe.

- *Eerstegraadsvergelijkingen*
  1. Werk haakjes en breuken weg.
  2. Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
  3. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.
- *Tweedegraadsvergelijkingen*
  - $ax^2 + bx = 0$
    Breng x buiten haakjes.
  - $ax^2 + c = 0$
    Herleid tot de vorm $x^2 =$ getal.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is te ontbinden
    Gebruik de product-som-methode en pas toe $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is niet te ontbinden
    Ga kwadraatafsplitsen of gebruik de *abc*-formule.
- *Hogeregraadsvergelijkingen*
  - $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$

    n oneven $\quad x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$

    n even en $p > 0 \quad x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$

    n even en $p < 0 \quad x^n = p$ heeft geen oplossingen
  - Derdegraadsvergelijkingen zoals $x^3 - x^2 - 2x = 0$.
    Breng x buiten haakjes. Je krijgt $x(x^2 - x - 2) = 0$

    $x(x + 1)(x - 2) = 0$

    $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$

    Bij de vierdegraadsvergelijking $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ breng je x^2 buiten haakjes.
  - Vierdegraadsvergelijkingen zoals $x^4 - x^2 - 2 = 0$.
    Gebruik de substitutie $x^2 = u$. Je krijgt $u^2 - u - 2 = 0$

    $(u + 1)(u - 2) = 0$

    $u = -1 \vee u = 2$

    $x^2 = -1 \vee x^2 = 2$

    $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

    Bij $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ gebruik je na de substitutie $x^2 = u$ de *abc*-formule bij $u^2 - 2u - 2 = 0$.
    Bij de zesdegraadsvergelijking $x^6 - x^3 - 2 = 0$ gebruik je de substitutie $x^3 = u$.

Algebraïsch
Stap voor stap zonder gebruik te maken van opties van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.

Exact
Ga algebraïsch te werk en rond niet af.

De *abc*-formule
$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$

- *Modulusvergelijkingen*

$|A| = B$ met $B \geq 0$ geeft $A = B \vee A = -B$
$|A| = B$ met $B < 0$ heeft geen oplossingen
$|A| = |B|$ geeft $A = B \vee A = -B$

Bij de vergelijking $|x^2 - 10| = 2$ krijg je

$$x^2 - 10 = 2 \vee x^2 - 10 = -2$$
$$x^2 = 12 \vee x^2 = 8$$
$$x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

- *De vormen $AB = AC$ en $A^2 = B^2$*

$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$
$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

Bij de vergelijking $(x^2 - 1)(x + 2) = 12(x - 1)$ krijg je

$$(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 12(x - 1)$$
$$x - 1 = 0 \vee (x + 1)(x + 2) = 12$$
$$x = 1 \vee x^2 + 3x + 2 = 12$$
$$x = 1 \vee x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$x = 1 \vee (x - 2)(x + 5) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 2 \vee x = -5$$

Bij de vergelijking $(x^2 - 1)^2 = (x + 5)^2$ krijg je

$$x^2 - 1 = x + 5 \quad \vee \quad x^2 - 1 = -x - 5$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 4 = 0$$
$$(x + 2)(x - 3) = 0 \quad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$
$$x = -2 \vee x = 3$$

- *Wortelvergelijkingen*
  Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen.

1 **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
2 **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
3 **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Bij de vergelijking $2x - \sqrt{x - 1} = 5$ krijg je

$$2x - 5 = \sqrt{x - 1}$$

kwadrateren geeft

$$4x^2 - 20x + 25 = x - 1$$
$$4x^2 - 21x + 26 = 0 \text{ met } D = (-21)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26 = 25$$
$$x = \frac{21 + 5}{8} = 3\tfrac{1}{4} \vee x = \frac{21 - 5}{8} = 2 \text{ (vold. niet)}$$

- *Gebroken vergelijkingen*
  Je gebruikt de volgende regels.

$\frac{A}{B}=0$ geeft $A=0 \wedge B \neq 0$
$\frac{A}{B}=C$ geeft $A=BC \wedge B \neq 0$
$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ geeft $AD=BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$
$\frac{A}{B}=\frac{C}{B}$ geeft $A=C \wedge B \neq 0$
$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}$ geeft $(A=0 \vee B=C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$

  Bij de vergelijking $\frac{2x^2-6}{x^2+2}=\frac{x^2-3}{x^2-5}$ krijg je

$$\frac{2x^2-6}{x^2+2}=\frac{2x^2-6}{2x^2-10}$$
$$2x^2-6=0 \vee x^2+2=2x^2-10$$
$$2x^2=6 \vee -x^2=-12$$
$$x^2=3 \vee x^2=12$$
$$x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3} \vee x=2\sqrt{3} \vee x=-2\sqrt{3}$$

- *Stelsels vergelijkingen*
  - Elimineren door optellen of aftrekken.
    Deze methode gebruik je meestal bij een stelsel met lineaire vergelijkingen zoals $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=5 \end{cases}$

    Je krijgt $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=5 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-3y=15 \end{cases}$ +

    $$5x \quad\quad = 20$$
    $$x=4$$

    $x=4$ en $x-y=5$ geeft $y=-1$, dus $(x, y)=(4, -1)$.
  - Elimineren door substitueren.
    Deze methode kun je gebruiken als elimineren door optellen of aftrekken niet lukt, zoals bijvoorbeeld bij $2x+3y=5 \wedge x^2+y^2=13$.

    Je krijgt $2x=-3y+5$, dus $x=-1\frac{1}{2}y+2\frac{1}{2}$.

    Substitueren van $x=-1\frac{1}{2}y+2\frac{1}{2}$ in $x^2+y^2=13$ geeft

    $(-1\frac{1}{2}y+2\frac{1}{2})^2+y^2=13$

    $2\frac{1}{4}y^2-7\frac{1}{2}y+6\frac{1}{4}+y^2=13$

    $3\frac{1}{4}y^2-7\frac{1}{2}y-6\frac{3}{4}=0$

    $13y^2-30y-27=0$

    Dit geeft $y=-\frac{9}{13} \vee y=3$.

    De oplossing van het stelsel is $(x, y)=(3\frac{7}{13}, -\frac{9}{13}) \vee (x, y)=(-2, 3)$.

Grafisch-numerieke methoden
Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch op moet lossen of dat je anders te werk mag gaan. Staat er niet ‘algebraïsch’ of ‘exact’, dan mag je de speciale opties van de GR gebruiken om een vergelijking op te lossen.

Bij het grafisch-numeriek oplossen van een vergelijking ga je als volgt te werk.
1 Voer het linkerlid van de vergelijking in bij y_1 en het rechterlid bij y_2.
2 Noteer de optie van de GR die je gebruikt.
3 Geef alle oplossingen in het gevraagde aantal decimalen of rond zelf verstandig af.

Ook de coördinaten van toppen van grafieken mag je soms grafisch-numeriek (dus zonder de afgeleide te gebruiken) berekenen. Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.
Weet je de y-coördinaten van de toppen van een grafiek, dan kun je het bereik van de functie aflezen uit de grafiek.
Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.
Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.

Onderzoeken, aantonen en bewijzen
Onderzoeken
Bij onderzoeken geef je een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van één of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Aantonen
Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

Bewijzen
Bij bewijzen geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Evenredig en omgekeerd evenredig

Grootheid A is evenredig met grootheid B als er een getal a bestaat waarvoor $A = aB$. Hierin is a de evenredigheidsconstante.
Is gegeven dat y evenredig is met e^{-2x}, dan geldt dus $y = a\,e^{-2x}$.
Is bovendien gegeven dat bij $x = 1$ hoort $y = 5$, dan is de evenredigheidsconstante te berekenen.
Je krijgt $ae^{-2} = 5$, dus $a = 5e^2$ en $y = 5e^2 \cdot e^{-2x}$.

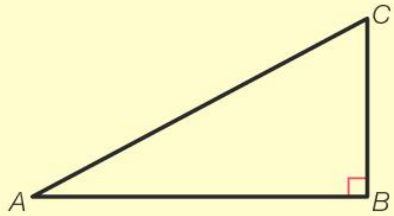
De grootheden A en B zijn omgekeerd evenredig als er een getal a bestaat waarvoor $A = \frac{a}{B}$.

Goniometrie en Pythagoras

In rechthoekige driehoeken zijn hoeken en zijden te berekenen met goniometrie en de stelling van Pythagoras.

$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$ $\qquad$ $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$

$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$ $\qquad$ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

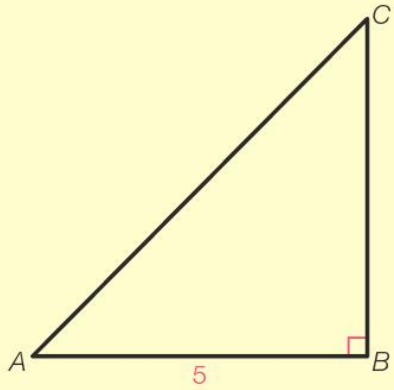


figuur 16.3

In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast is de lengte van AC twee meer dan de lengte van BC.
Om BC en AC te berekenen, stel je $BC = x$. Dan is $AC = x + 2$.
De stelling van Pythagoras geeft $5^2 + x^2 = (x + 2)^2$

$$25 + x^2 = x^2 + 4x + 4$$
$$4x = 21$$
$$x = 5\tfrac{1}{4}$$

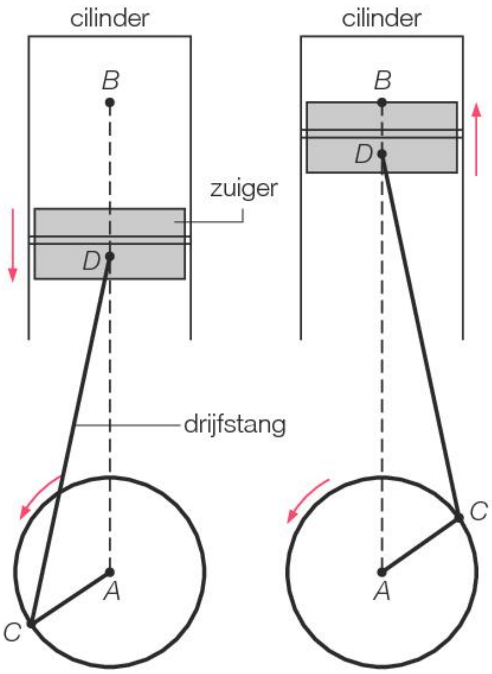
Dus $BC = 5\frac{1}{4}$ en $AC = 5\frac{1}{4} + 2 = 7\frac{1}{4}$.



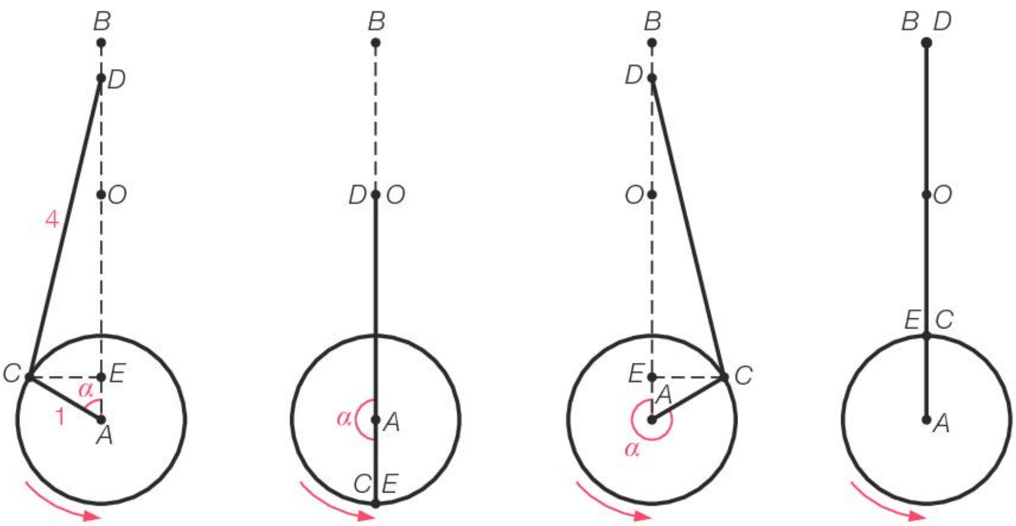
figuur 16.4

2 **2016-I**

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging.
In figuur 16.5 zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.
In figuur 16.6 zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 heeft. De grootte van hoek CAD (in radialen) noemen we α. Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.



figuur 16.5



figuur 16.6

Punt D beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt B ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt O ($\alpha = \pi$).
De afstand van D tot B noemen we s.
s hangt af van α. Er geldt $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$ met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

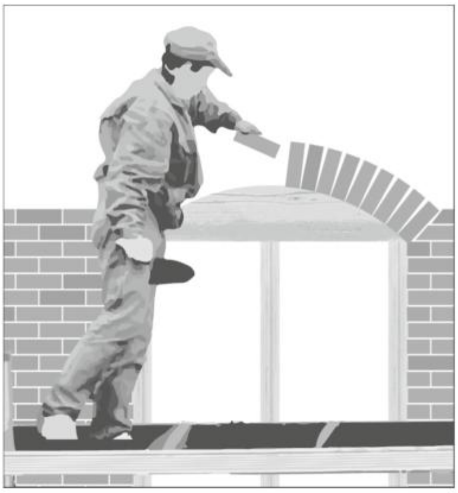
a Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 16.6 getekende standen (dus voor $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

In de techniek wordt s soms benaderd met behulp van de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.
Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor s geeft, wordt het maximale verschil tussen s en z berekend.

b Bereken dit maximale verschil. Rond af op drie decimalen.

3 **2016-I**

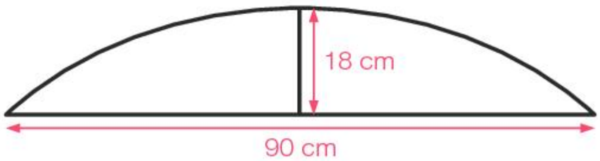
In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Zie figuur 16.7.
Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie figuur 16.8.



figuur 16.8

figuur 16.7

De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken.
De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 16.9 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.

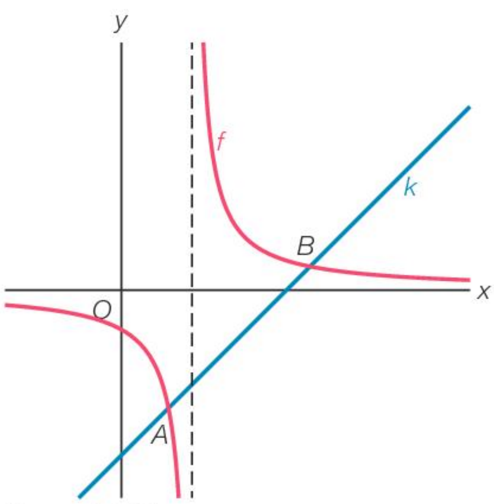


figuur 16.9

De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.
Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

4 **2017-I**

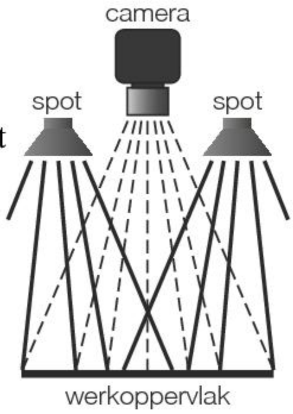
De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{5}{4x - 6}$.
De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B.
Zie figuur 16.10.
Bereken exact de coördinaten van A en B.



figuur 16.10

5 **2016-II**

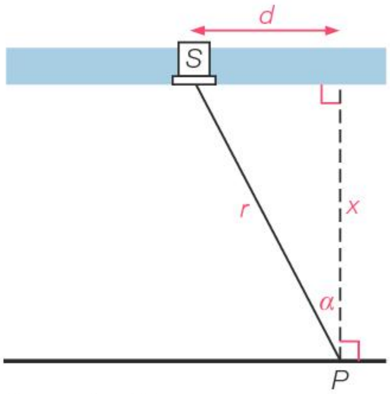
Veel industriële en medische processen worden gestuurd door een digitale camera die gekoppeld is aan een computer. Hierbij is een gelijkmatige verlichting van het werkoppervlak van groot belang. Voor de belichting gebruikt men vaak één of meer kleine spots. Zie figuur 16.11.
Om de belichting goed te kunnen instellen is de hoogte van de spots boven het werkoppervlak variabel.



figuur 16.11

We bekijken eerst de situatie met één spot S.
Zie figuur 16.12.
De waargenomen verlichtingssterkte E (in lux) in een punt P van een horizontaal oppervlak kan berekend worden met de formule $E = \frac{I_{spot}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha)$.

Hierin is
- I_{spot} een constante: de door de spot uitgezonden lichtstroom (in microlumen)
- r de afstand (in mm) tot de spot
- α de hoek (in radialen) tussen de lichtstraal en de loodlijn in P op het werkoppervlak.



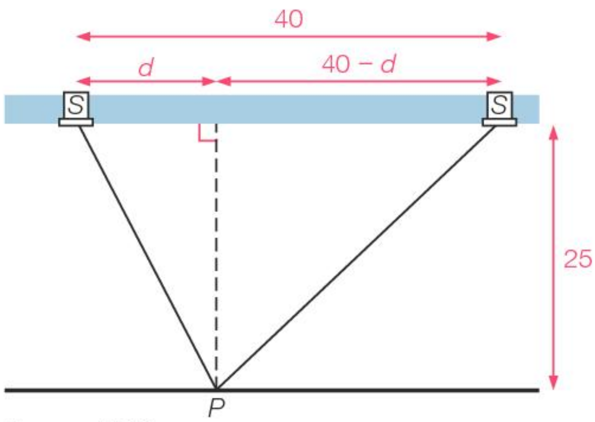
figuur 16.12

In figuur 16.12 is d de horizontale afstand in mm van de spot tot P en x de verticale afstand in mm van de spot tot P.

Er geldt $E = \frac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1\frac{1}{2}}}$.

a Bewijs dit.

In de rest van deze opgave bekijken we de situatie met twee identieke spots. Voor elke spot geldt: $I_{spot} = 500$. De spots hebben horizontaal een onderlinge afstand van 40 mm en schijnen recht naar beneden. De verticale afstand van de spots tot het werkoppervlak is 25 mm. Zie figuur 16.13. Hierin is ook d aangegeven, de horizontale afstand in mm van de linker spot tot P.



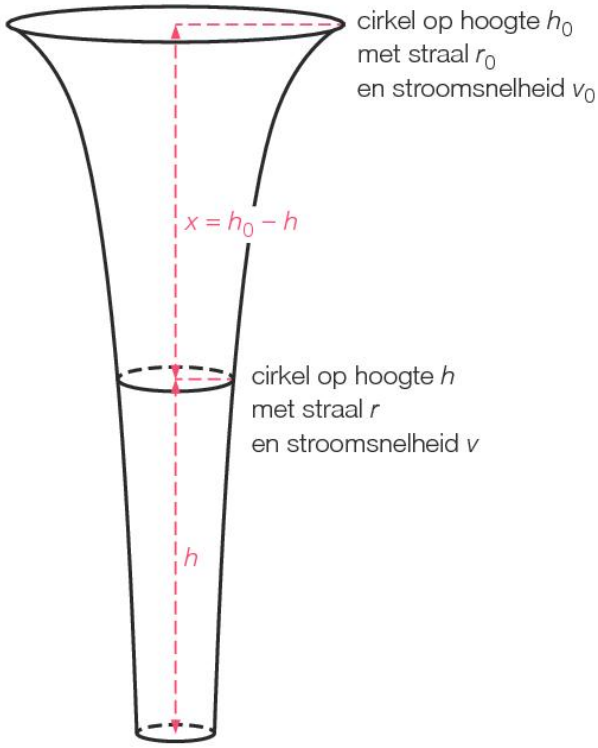
figuur 16.13

De totale verlichtingssterkte E_{totaal} in een punt op het werkoppervlak is de som van de waargenomen verlichtingssterktes in dat punt van beide spots.
Het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht als de laagste waarde van E_{totaal} in dat deel minstens 80% van de hoogste waarde van E_{totaal} bedraagt.

b Onderzoek of bij de ingestelde verticale afstand van 25 mm het deel van het werkoppervlak tussen de spots voldoende gelijkmatig belicht wordt.

6 **2017-II**

In deze opgave kijken we naar water dat uit een cirkelvormige kraanopening stroomt.
In figuur 16.14 is de vorm van de waterstraal getekend. Op elke hoogte is de horizontale doorsnede van de waterstraal een cirkel. De straal van die cirkel wordt naar beneden toe steeds kleiner.
Op hoogte h heeft de horizontale doorsnede straal r en is de stroomsnelheid van het water v.
De kraanopening heeft straal r_0 en bevindt zich op hoogte h_0.
De snelheid waarmee het water uit de kraan stroomt, is v_0.
Het hoogteverschil $h_0 - h$ geven we aan met x.
In de formules van deze opgave is meter de eenheid van lengte en meter per seconde de eenheid van snelheid.



figuur 16.14

Uit de (natuurkundige) Wet van behoud van energie volgt
$v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh$. **(1)**
Hierin is g de valversnelling van 9,81 m/s^2.
De hoeveelheid water die per seconde op een bepaalde hoogte voorbij stroomt, is voor elke hoogte gelijk. Hieruit is af te leiden
$r_0^2 \cdot v_0 = r^2 \cdot v$. **(2)**
Door formule 1 en formule 2 te combineren kan worden aangetoond

$$r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}. \quad \textbf{(3)}$$

Toon door formule 1 en formule 2 te combineren aan dat formule 3 juist is.

7 **2018-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}$.

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt $f(x) = h(x)$.

8 **2018-II**

De snelheid waarmee een ijsklontje smelt, hangt onder andere af van de verhouding tussen de oppervlakte A in cm^2 en het volume V in cm^3 van het ijsklontje. Deze verhouding wordt uitgedrukt in het quotiënt $\frac{A}{V}$.

Voorbeeld: bij een kubusvormig ijsklontje met ribben van 3 cm is dit quotiënt gelijk aan $\frac{54}{27} = 2$.
Er zijn ook bolvormige ijsklontjes oftewel *ijsbollen*.
Zie de foto.
Voor een bol met straal r gelden voor A en V de formules $A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bij een ijsbol met hetzelfde volume als het genoemde kubusvormige ijsklontje met ribben van 3 cm is het quotiënt $\frac{A}{V}$ kleiner dan 2.

a Bereken algebraïsch dit quotiënt bij deze ijsbol. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

In een wiskundig model van het smelten van een ijsbol wordt ervan uitgegaan dat de ijsbol tijdens het smelten bolvormig blijft.
De straal van de ijsbol is afhankelijk van de tijd. De straal van de ijsbol op tijdstip t is $r(t)$, met t in minuten.
Het volume van de ijsbol op tijdstip t is dan $V(t) = \frac{4}{3}\pi(r(t))^3$. In het model wordt er verder van uitgegaan dat de formule van $r(t)$ lineair is.
Een ijsbol heeft op tijdstip $t = 0$ een straal van 1,5 cm. Op tijdstip $t = 10$ is het volume van deze ijsbol gehalveerd. Vanaf een bepaald tijdstip is er geen ijs meer aanwezig.

b Bereken vanaf welk geheel aantal minuten er voor het eerst geen ijs meer aanwezig is.

9 **2019-II**

In de metaalindustrie worden met een boormachine gaten in harde materialen geboord. Zie de foto.

In een fabriek boort één boormachine 24 uur per dag dezelfde soort gaten. Het is belangrijk de snelheid van de boor goed in te stellen: een hoge snelheid betekent dat het boren van een gat minder tijd kost. Maar daar staat tegenover dat de boor sneller vervangen moet worden.

Men wil berekenen bij welke (snij)snelheid V het aantal geboorde gaten A per 24 uur maximaal is. Hierbij is V in meter per minuut.

Om A uit te kunnen drukken in V doen we de volgende aannames.

I Het aantal gaten N dat in één minuut geboord kan worden, is recht evenredig met de snelheid V van de boor. Bij een snelheid van 20 m/min boort deze boor 6 gaten in één minuut.

II Tussen V en de levensduur T van de boor geldt het verband $V \cdot T^{0,25} = 150$. Hierin is T in minuten.

III Het vervangen van een boor kost telkens 2 minuten. De boormachine is dus maar een deel van de tijd bezig met boren. Voor dit deel d geldt $d = \dfrac{T}{T+2}$.

IV Voor het aantal geboorde gaten A per 24 uur geldt $A = 1440 \cdot N \cdot d$.

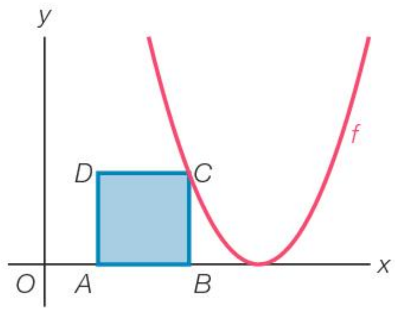
Met de aannames I, II, III en IV kun je voor A de formule

$A = \dfrac{432V}{\dfrac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$ opstellen.

Leid deze formule voor A af uit de aannames I, II, III en IV.

16.2 Functies en grafieken

10 **a** Gegeven is de functie $f(x) = (x-4)^2$.
Van het vierkant $ABCD$ is $A(1, 0)$, ligt het punt B op de x-as tussen A en de top van de grafiek van f, en ligt het punt C op de grafiek van f. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.



figuur 16.15

b Voor elke waarde van a is gegeven de functie
$f_a(x) = \dfrac{4x+a}{x-4}$.
Bewijs dat voor elke waarde van a de grafiek van f_a puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $P(4, 4)$.

c Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^3 + 3$.
Stel het functievoorschrift op van de inverse functie f^{inv} van f.

d Voor elke waarde van b is gegeven de functie $f_b(x) = \dfrac{3}{x-2} + b$.
Bereken voor welke waarde van b de functie f_b de inverse is van zichzelf.

e De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{6}{2x-5}$ wordt 3 naar links en 2 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Stel het functievoorschrift op van g^{inv} in de vorm $g^{\text{inv}}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

f Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{2x-2} + 1$.
De grafiek van f snijdt de grafiek van de inverse van f in drie punten.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.

g Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x+6}$.
Bereken exact de afstand tussen de horizontale asymptoot van de grafiek van f en de horizontale asymptoot van de grafiek van de inverse van f.

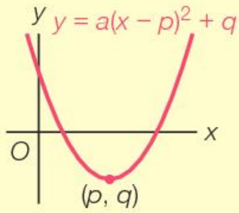
h Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f_p(x) = \dfrac{5}{p(x-3)} + 6$.
De grafiek van f_p snijdt de lijn $y = 2x$ in het punt A.
Druk de x-coördinaat van A uit in p en bereken $\lim\limits_{p \to \infty} x_A$.

i Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = \dfrac{4x^2 + px + 3}{(x^2+4)(2x-1)}$.
Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.
Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

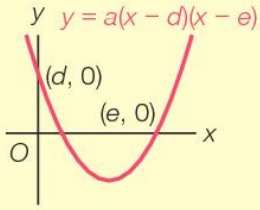
j Gegeven is de functie $f(x) = \left|\frac{1}{4}x - 1\right| \cdot (\frac{1}{2}x + 3)$.
De grafiek van f heeft het knikpunt $A(4, 0)$.
Bereken exact $\lim\limits_{x \uparrow 4} f'(x)$.

Formules van parabool

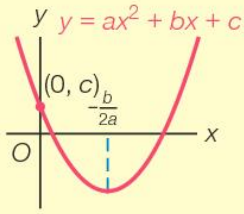
- $y = a(x - p)^2 + q$ top (p, q)



- $y = a(x - d)(x - e)$ snijpunten met x-as $(d, 0)$ en $(e, 0)$

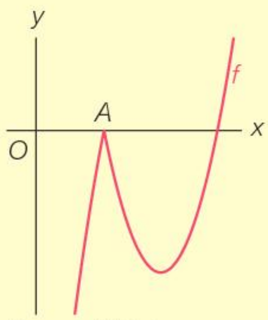


- $y = ax^2 + bx + c$ $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$ en snijpunt met y-as $(0, c)$



Modulusfuncties

De functie $f(x) = |2x - 3| \cdot (x - 4)$ is een voorbeeld van een modulusfunctie.
Omdat $|2x - 3| = 2x - 3$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{2}$, is $f(x) = (2x - 3)(x - 4) = 2x^2 - 11x + 12$ als $x \geq 1\frac{1}{2}$.
Omdat $|2x - 3| = -2x + 3$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$, is $f(x) = (-2x + 3)(x - 4) = -2x^2 + 11x - 12$ als $x < 1\frac{1}{2}$.
Hiernaast zie je de grafiek van f. Het knikpunt is het punt $A(1\frac{1}{2}, 0)$.



figuur 16.16

Transformaties

- Bij de translatie $(0, a)$ tel je a op bij de functiewaarde.

  $y = 2^{x+1} - 3 \xrightarrow{\text{translatie } (0,\,5)} y = 2^{x+1} + 2$

- Bij de translatie $(b, 0)$ vervang je x door $x - b$.

  $y = x^2 - 3x \xrightarrow{\text{translatie } (2,\,0)} y = (x - 2)^2 - 3(x - 2) = x^2 - 7x + 10$

- Bij de vermenigvuldiging met c t.o.v. de x-as vermenigvuldig je de functiewaarde met c.

  $y = \dfrac{x - 1}{2x - 3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot \dfrac{x - 1}{2x - 3} = \dfrac{4x - 4}{2x - 3}$

- Bij de vermenigvuldiging met d t.o.v. de y-as vervang je x door $\dfrac{1}{d}x$.

  $y = 4 + \sqrt{2x - 1} \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 4 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}x - 1} = 4 + \sqrt{\frac{2}{3}x - 1}$

Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als voor elke p geldt $f(a - p) = f(a + p)$.
De grafiek van een functie f is puntsymmetrisch in het punt (a, b) als voor elke p geldt $f(a - p) + f(a + p) = 2b$.

Om te bewijzen dat de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 4}$

puntsymmetrisch is in het punt $A(2, 1\tfrac{1}{2})$ laat je dus zien dat geldt $f(2 - p) + f(2 + p) = 3$.

$$f(2 - p) = \frac{3(2 - p) + 4}{2(2 - p) - 4} = \frac{6 - 3p + 4}{4 - 2p - 4} = \frac{-3p + 10}{-2p} = \frac{3p - 10}{2p}$$

$$f(2 + p) = \frac{3(2 + p) + 4}{2(2 + p) - 4} = \frac{6 + 3p + 4}{4 + 2p - 4} = \frac{3p + 10}{2p}$$

Dit geeft

$$f(2 - p) + f(2 + p) = \frac{3p - 10}{2p} + \frac{3p + 10}{2p} = \frac{3p - 10 + 3p + 10}{2p} = \frac{6p}{2p} = 3 = 2 \cdot y_A.$$

Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in het punt $A(2, 1\tfrac{1}{2})$.

Inverse functies

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse.

Om aan te tonen dat de functies $f(x) = 5 - \dfrac{6}{x + 2}$ en $g(x) = \dfrac{2x - 4}{5 - x}$ elkaars

inverse zijn, kun je als volgt te werk gaan.

- Ga uit van $y = 5 - \dfrac{6}{x + 2}$ en verwissel x en y.

  Je krijgt $x = 5 - \dfrac{6}{y + 2}$.
- Maak y vrij bij $x = 5 - \dfrac{6}{y + 2}$.

  Dus $\dfrac{6}{y + 2} = 5 - x$

  $y + 2 = \dfrac{6}{5 - x}$

  $y = \dfrac{6}{5 - x} - 2$
- Dus $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{6}{5 - x} - 2 = \dfrac{6 - 2(5 - x)}{5 - x} = \dfrac{6 - 10 + 2x}{5 - x} = \dfrac{2x - 4}{5 - x} = g(x)$.

  Hiermee is aangetoond dat f en g elkaars inverse zijn.

Limieten en perforaties

De limiet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Hierbij is $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ een linkerlimiet en $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ een rechterlimiet.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x - 4}$ heeft een perforatie voor $x = 4$, want $f(4)$ bestaat niet en $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ bestaat wel. Om de coördinaten van de perforatie te vinden, bereken je $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. Daartoe ontbind je $3x^2 - 7x - 20$ in twee factoren, waarvan de ene factor $(x - 4)$ is.
Je krijgt $3x^2 - 7x - 20 = (x - 4)(3x + 5)$.

Dus $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x - 4)(3x + 5)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4}(3x + 5) = 17$.
De grafiek van f is de lijn $y = 3x + 5$ met de perforatie $(4, 17)$.

Limieten en asymptoten

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ heeft twee verticale asymptoten en één horizontale asymptoot.
De verticale asymptoten vind je door de noemer nul te stellen. Er moet gelden noemer = 0 en teller $\neq 0$. Dus $x^2 - 1 = 0 \wedge 5x^2 - 3x \neq 0$ en dat geeft $x = 1 \vee x = -1$. De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$.
Omdat voor de functie f geldt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ hoef je alleen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ te berekenen voor het vinden van de formule van de horizontale asymptoot.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{5 - 0}{1 - 0} = 5$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 5$.

De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{x - 1}$ heeft behalve de verticale asymptoot $x = 1$ ook een scheve asymptoot.
Je kunt als volgt bewijzen dat dit de lijn $y = 5x + 2$ is.

$$g(x) = \frac{5x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{5x(x - 1) + 5x - 3x}{x - 1} = 5x + \frac{2x}{x - 1} = 5x + \frac{2(x - 1) + 2}{x - 1} = 5x + 2 + \frac{2}{x - 1}$$

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$ nadert de grafiek van g de lijn $y = 5x + 2$ voor zowel $x \to \infty$ als voor $x \to -\infty$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 5x + 2$.

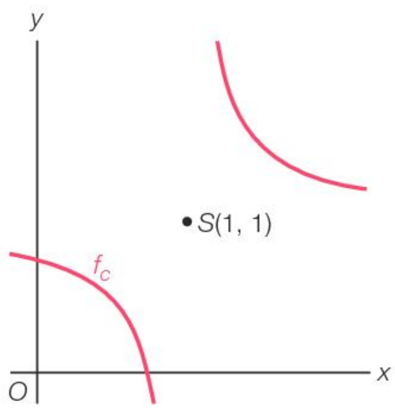
11 **2016-I**

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door $f_c(x) = \dfrac{1}{c(x-1)} + 1$.

a Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten (1, 1).
In figuur 16.17 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.
De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt dat
$\dfrac{f_c(1+p)+f_c(1-p)}{2} = 1$.

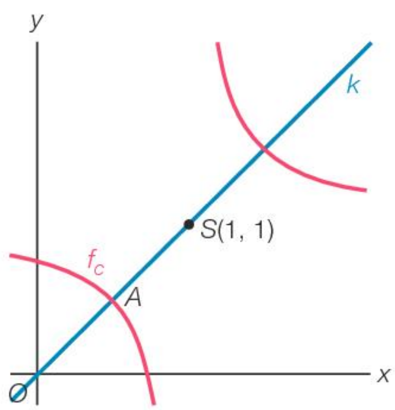
b Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S.



figuur 16.17

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten. Punt A is het linker snijpunt.
In figuur 16.18 is de situatie van figuur 16.17 uitgebreid met A en k.
Als c groter wordt, verschuift A over lijn k, waarbij zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A toenemen.
Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A.

c Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A.



figuur 16.18

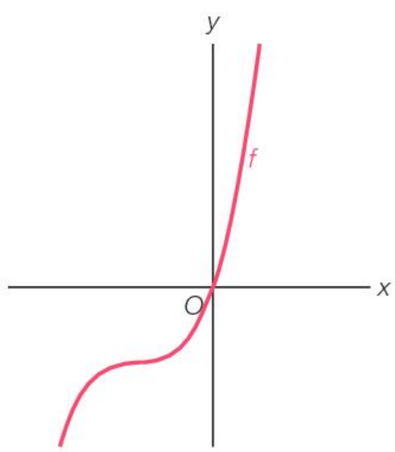
12 **2016-II**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = (x+1)^3 - 1$.
In de figuur is de grafiek van f weergegeven.
De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$.
De functie g is de inverse functie van f.

a Bewijs dat g inderdaad de inverse functie is van f.

De grafieken van f en g hebben gemeenschappelijke punten.

b Bereken exact de coördinaten van deze punten.



figuur 16.19

13 **2017-I**

Voor elke waarde van p, met $p \neq 0$, is de functie f_p gegeven door

$$f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2+1)(x-2)}.$$

Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.
Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

14 **2017-I**

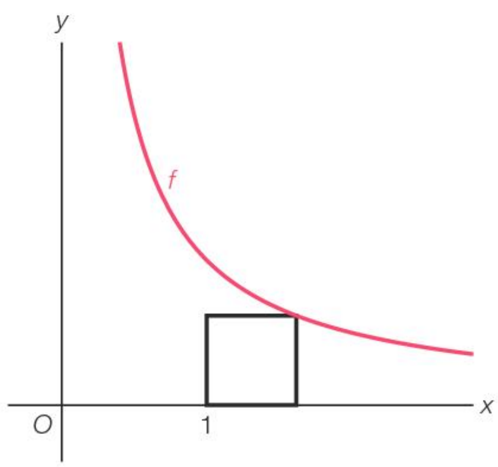
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{5}{4x-6}$.

De grafiek van f wordt a eenheden naar boven verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie g. De waarde van a kan zowel positief als negatief zijn.
De functie g heeft een inverse functie. De grafiek van de inverse functie van g heeft één verticale asymptoot. Ook de grafiek van g heeft een verticale asymptoot. Gegeven is, dat de afstand tussen deze twee verticale asymptoten gelijk is aan 4.
Bereken exact de mogelijke waarden van a.

15 **2018-I**

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.

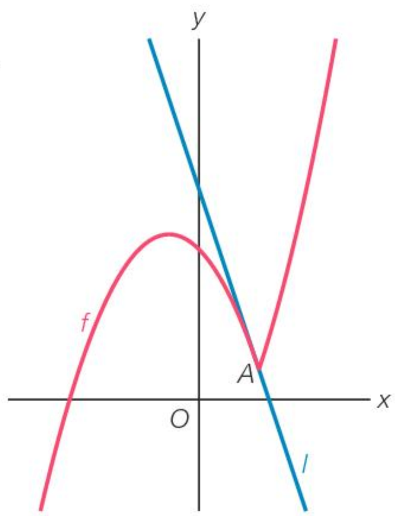
In de figuur is de grafiek van f getekend. Onder de grafiek is een vierkant getekend met twee zijden evenwijdig aan de x-as en twee zijden evenwijdig aan de y-as.
Het vierkant heeft linksonder hoekpunt (1, 0).
Het hoekpunt rechtsboven ligt op de grafiek van f.
Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.



figuur 16.20

16 **2019-II**

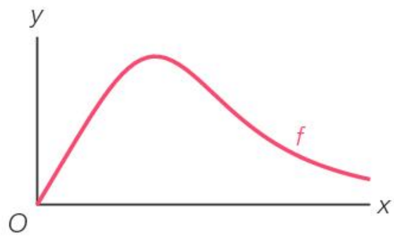
De functie f wordt gegeven door $f(x) = |x-2| \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$.
De grafiek van f heeft een knik in het punt A. Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen. De lijn l is de raaklijn in A aan het linkerdeel van de grafiek. Zie de figuur.
Stel op exacte wijze een vergelijking van lijn l op.



figuur 16.21

16.3 Differentiaal- en integraalrekening

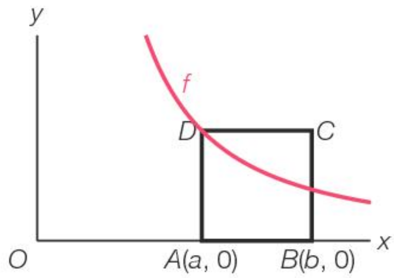
17 **a** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x}{0{,}1x^4 + 3}$ voor $x > 0$.
Hiernaast zie je de grafiek van f.
Bereken exact voor welke waarde van x de functie maximaal is.



figuur 16.22

b Voor $x > 0$ is gegeven de formule $H = \dfrac{2x}{(x^2 + 4)^{1\frac{1}{2}}}$.
Bereken exact de waarde van x waarvoor H maximaal is.

c Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{64}{3x\sqrt{x}}$.
Hiernaast zie je de grafiek van f. Ook is het vierkant $ABCD$ getekend. De punten $A(a, 0)$ en $B(b, 0)$ liggen op de x-as en het punt D ligt op de grafiek van f.
Als A naar rechts verschuift, dan verschuift B mee naar rechts. Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.
Bereken exact de minimale waarde van b.

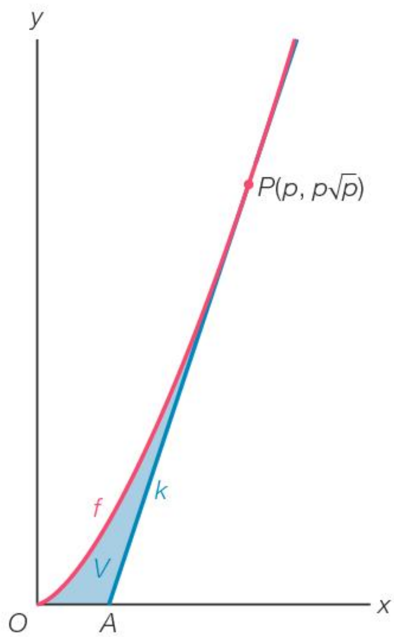


figuur 16.23

d Bewijs dat de grafieken van de functies $f(x) = \dfrac{8}{1 + \sqrt{2x + 9}}$ en $g(x) = 6x + 2$ elkaar loodrecht snijden in het punt $(0, 2)$.

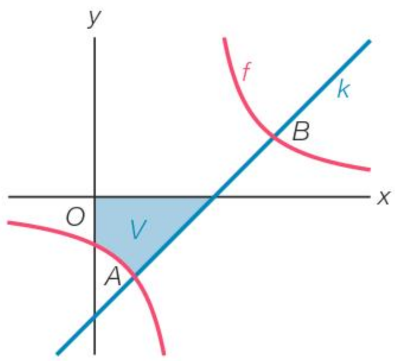
e Bereken exact voor welke p de grafiek van $f_p(x) = x^2 + px + 2p$ de grafiek van $g(x) = x + 5$ raakt.

18 **a** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P met $x_P = p$ en snijdt de x-as in het punt A. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn k. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 4. Schrijf het antwoord in de vorm $\sqrt[a]{b}$ met a en b gehele getallen.



figuur 16.24

b Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6}{2x - 5}$.
De lijn k: $y = x - 3$ snijdt de grafiek van f in de punten $A(1, -2)$ en $B(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



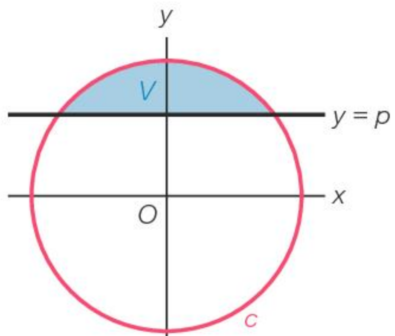
figuur 16.25

c Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[4]{x}$, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = b$ met $b > 1$.
Als V wentelt om de x-as ontstaat het lichaam L.
Bereken exact voor welke waarde van b de inhoud van L gelijk is aan $17\frac{1}{3}\pi$.

d Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}05 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}6}{0{,}8 + 25x}}$, de x-as, de y-as en de lijn $x = 5$.
Bereken de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as. Rond af op vier decimalen.

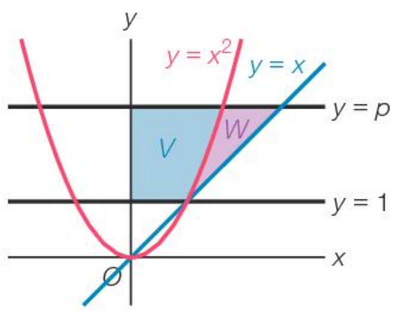
e Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{x}$, de y-as en de lijn $y = 6$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

f De cirkel c: $x^2 + y^2 = 9$ wentelt om de y-as. Zo ontstaat de bol B met straal 3. De inhoud van B bereken je met de formule $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door c en de lijn $y = p$. Zie de figuur hiernaast.
Als V om de y-as wentelt, ontstaat het lichaam L.
Bereken voor welke waarde van p de inhoud van L gelijk is aan 10% van de inhoud van B. Rond af op drie decimalen.



figuur 16.26

g Het vlakdeel V wordt ingesloten door de parabool $y = x^2$, de y-as en de lijnen $y = 1$ en $y = p$ met $p > 1$.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de parabool $y = x^2$, de lijn $y = x$ en de lijn $y = p$. Zie de figuur hiernaast.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de y-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.
Bereken voor welke waarde van p de inhoud van L gelijk is aan de inhoud van M. Rond af op drie decimalen.



figuur 16.27

Regels voor het differentiëren

Enkele regels voor het differentiëren.

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$	
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$	
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$	somregel
$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$	verschilregel
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	productregel
$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$	quotiëntregel
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	kettingregel

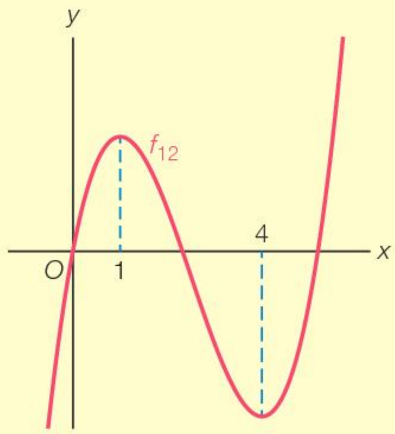
De andere regels komen in de paragrafen 16.4 en 16.7 aan de orde.
Bij de formule $B = \dfrac{5t}{\sqrt{t^2+4}}$ gebruik je de notatie $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ voor de afgeleide.
Bij het berekenen van de afgeleide heb je de quotiëntregel en de kettingregel nodig. Je krijgt

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{t^2+4} \cdot 5 - 5t \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t^2+4}} \cdot 2t}{t^2+4} = \frac{5(t^2+4) - 5t^2}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}} = \frac{20}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}}.$$

Extreme waarden, buigpunten en raaklijnen

Gegeven is dat de functie $f_p(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + px$ een extreme waarde heeft voor $x = 1$. Gevraagd wordt de andere extreme waarde exact te berekenen.
Je gaat als volgt te werk.

- Bereken $f_p'(x)$. Je krijgt $f_p'(x) = 3x^2 - 15x + p$.
- Er moet gelden $f_p'(1) = 0$, dus $3 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + p = 0$.
  Dit geeft $p = 12$, dus $f_{12}'(x) = 3x^2 - 15x + 12$.
- Los de vergelijking $f_{12}'(x) = 0$ op.
  $3x^2 - 15x + 12 = 0$
  $x^2 - 5x + 4 = 0$
  $(x - 1)(x - 4) = 0$
  $x = 1 \vee x = 4$
- Schets de grafiek van f_{12}.
  Zie hiernaast, er is een minimum voor $x = 4$.
  Je krijgt min. is $f_{12}(4) = -8$.



figuur 16.28

Er wordt gesteld dat het punt waar de buigraaklijn van de grafiek van $f_p(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + px$ de y-as snijdt onafhankelijk is van p.
Om dit te bewijzen ga je als volgt te werk.

- Bereken $f_p''(x)$. Je krijgt $f_p''(x) = 6x - 15$.
- Los op $f_p''(x) = 0$. Je krijgt $x = 2\frac{1}{2}$. Dus $x_{\text{buigpunt}} = 2\frac{1}{2}$.
- Druk $f_p(2\frac{1}{2})$ en $f_p'(2\frac{1}{2})$ uit in p.
  Je krijgt $f_p(2\frac{1}{2}) = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p$ en $f_p'(2\frac{1}{2}) = -18\frac{3}{4} + p$.
- Bereken b in de vergelijking $y = ax + b$ van de buigraaklijn.

$$\left.\begin{array}{l} y = (-18\frac{3}{4} + p)x + b \\ \text{door } (2\frac{1}{2}, -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-18\frac{3}{4} + p) \cdot 2\frac{1}{2} + b = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p \\ -46\frac{7}{8} + 2\frac{1}{2}p + b = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p \\ b = 15\frac{5}{8} \end{array}$$

- Trek de conclusie.
  De buigraaklijn snijdt de y-as in het punt $(0, 15\frac{5}{8})$ en dit is onafhankelijk van p.

Raken en loodrecht snijden

De grafieken van de functies f en g raken elkaar in het punt A als de raaklijn in A van de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A van de grafiek van g.
De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.
Je kunt als volgt bewijzen dat de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{2x+5}$ en $g(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$ elkaar raken in het punt $A(2, 3)$.
$f(2) = \sqrt{2 \cdot 2 + 5} = \sqrt{9} = 3$ en $g(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2 + 3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 3 = 3$, dus het punt $A(2, 3)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafieken van f en g.

$f(x) = \sqrt{2x+5}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$, dus

$f'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{3}$ en $g(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$ geeft $g'(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$, dus

$g'(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Er geldt dus bovendien dat $f'(2) = g'(2)$ en hiermee is bewezen dat de grafieken van f en g elkaar raken in het punt $A(2, 3)$.

Voor de lijnen k en l met $\text{rc}_k \neq 0$ en $\text{rc}_l \neq 0$ geldt: $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.
De grafieken van de functies f en g snijden elkaar loodrecht in het punt A als de x-coördinaat voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$.
Je kunt als volgt berekenen voor welke a en b de lijn k: $y = ax + b$ de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x+5}$ loodrecht snijdt in het punt $A(2, 3)$.

Omdat $f'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{3}$ is $a = -3$, want $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$.
$A(2, 3)$ op $y = -3x + b$ geeft $-3 \cdot 2 + b = 3$, dus $b = 9$.

Regels voor het primitiveren

Enkele regels voor het primitiveren.

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$
De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

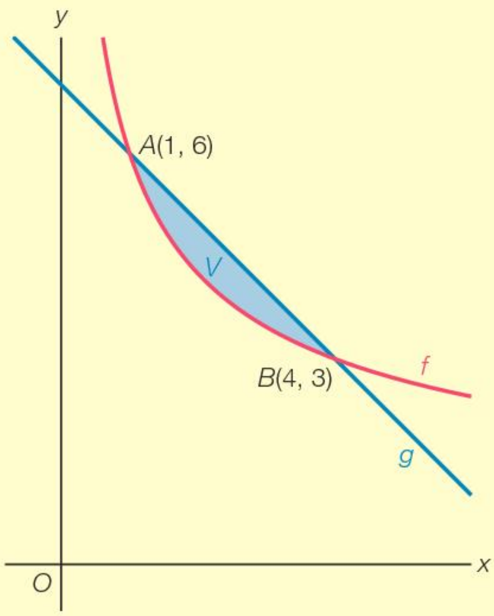
De andere regels komen in de paragrafen 16.4 en 16.7 aan de orde.
Om de primitieven te berekenen van $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ schrijf je $f(x) = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$.
Je krijgt $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}}(3x + 1)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{9}(3x + 1)\sqrt{3x + 1} + c$.

Bij $g(x) = \frac{1}{3x + 1}$ krijg je $G(x) = \frac{1}{3}\ln|3x + 1| + c$.

Oppervlakte en inhoud

In figuur 16.29 zie je de grafieken van de functies $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$ en $g(x) = -x + 7$. De grafieken snijden elkaar in de punten $A(1, 6)$ en $B(4, 3)$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
De oppervlakte van V bereken je exact als volgt.

$$O(V) = \int_1^4 (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^4 (-x + 7 - 6x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 7x - 12x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$= -\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 - 12\sqrt{4} - (-\tfrac{1}{2} + 7 - 12) = 1\tfrac{1}{2}$$



figuur 16.29

Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.
De inhoud van L bereken je exact als volgt.

$$I(L) = \pi\int_1^5 ((g(x))^2 - (f(x))^2)\,dx =$$
$$= \pi\int_1^4 \left((-x + 7)^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{x}}\right)^2\right)dx = \pi\int_1^4 \left(x^2 - 14x + 49 - \frac{36}{x}\right)dx$$
$$= \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 49x - 36\ln|x|\right]_1^4$$
$$= \pi(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 7 \cdot 4^2 + 49 \cdot 4 - 36\ln|4| - (\tfrac{1}{3} - 7 + 49 - 36\ln|1|))$$
$$= \pi(63 - 36\ln(4))$$

Het lichaam M ontstaat als V wentelt om de y-as.
De inhoud van M bereken je exact als volgt.

Druk bij $y = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$ en $y = -x + 7$ eerst x uit in y.

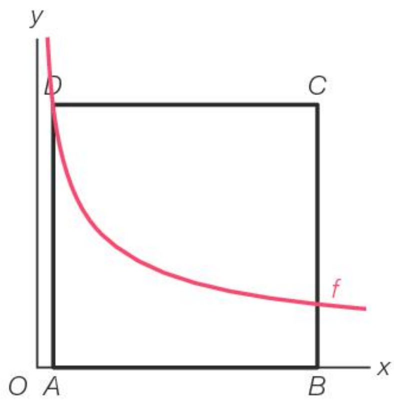
Je krijgt $x = \dfrac{36}{y^2}$ en $x = -y + 7$.

$$\begin{aligned} I(M) &= \pi\int_3^6 \left((-y+7)^2 - \left(\frac{36}{y^2}\right)^2\right) \mathrm{d}y = \pi\int_3^6 (y^2 - 14y + 49 - 1296y^{-4})\,\mathrm{d}y \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{3}y^3 - 7y^2 + 49y + 432y^{-3}\right]_3^6 \\ &= \pi\left(\tfrac{1}{3}\cdot 6^3 - 7\cdot 6^2 + 49\cdot 6 + \frac{432}{6^3} - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - 7\cdot 3^2 + 49\cdot 3 + \frac{432}{3^3}\right)\right) \\ &= 7\pi \end{aligned}$$

19 **2016-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as en het hoekpunt D op de grafiek van f.
Zie figuur 16.30.
De x-coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b, met $0 < a < b$. De coördinaten van D zijn dan $\left(a, \frac{16}{\sqrt{a}}\right)$.

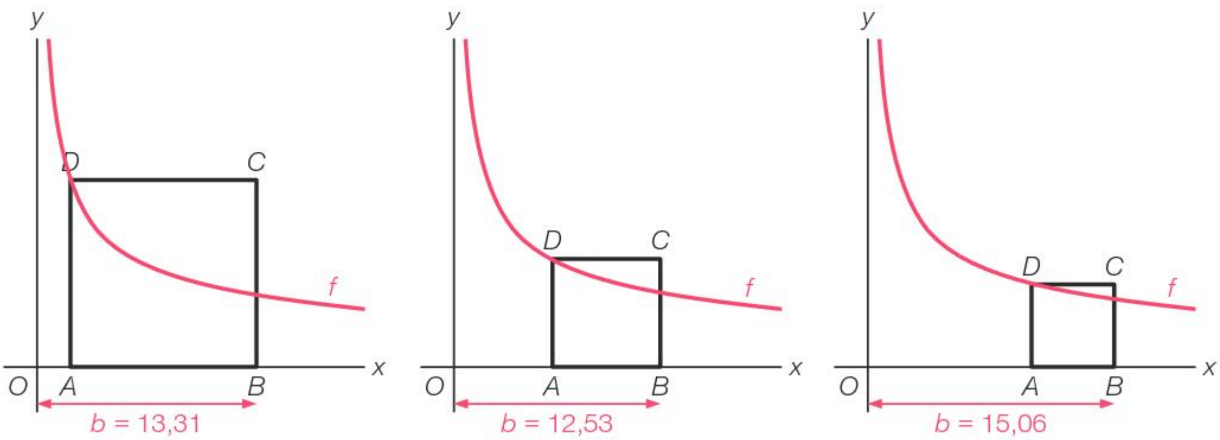


figuur 16.30

Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16.
V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt.
Vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

a Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 16.31 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.



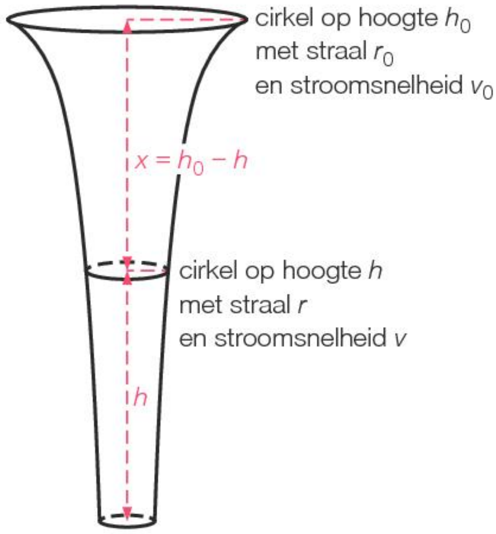
figuur 16.31

Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a, de x-coördinaat van A.
Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe.
Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

b Bereken exact de minimale waarde van b.

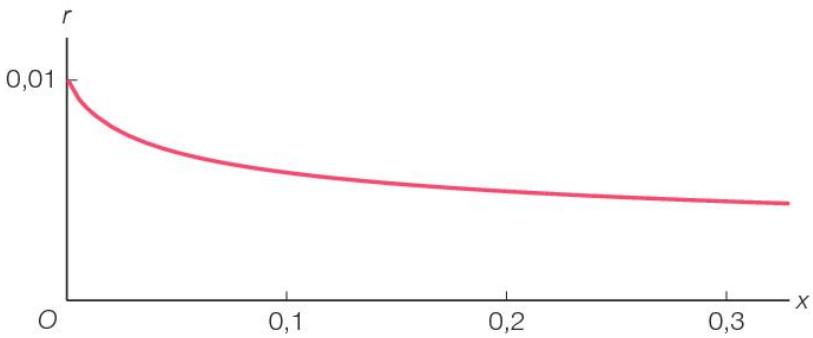
20 **2017-II**

In deze opgave kijken we naar water dat uit een cirkelvormige kraanopening stroomt.
In figuur 16.32 is de vorm van de waterstraal getekend. Op elke hoogte is de horizontale doorsnede van de waterstraal een cirkel. De straal van die cirkel wordt naar beneden toe steeds kleiner.
Op hoogte h heeft de horizontale doorsnede straal r en is de stroomsnelheid van het water v.
De kraanopening heeft straal r_0 en bevindt zich op hoogte h_0.
De snelheid waarmee het water uit de kraan stroomt, is v_0.
Het hoogteverschil $h_0 - h$ geven we aan met x.



figuur 16.32

Er geldt $r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}$.
In deze formule is meter de eenheid van lengte, meter per seconde de eenheid van snelheid en is g de valversnelling van 9,81 m/s^2.
Een bepaalde kraan heeft een opening met een diameter van 2 cm. De opening bevindt zich 30 cm boven een oppervlak. De kraan wordt zo ver opengedraaid dat $v_0 = 0{,}5$ m/s.
In figuur 16.33 is voor deze waterkraan de grafiek getekend die het verband weergeeft tussen het hoogteverschil x en de straal r.



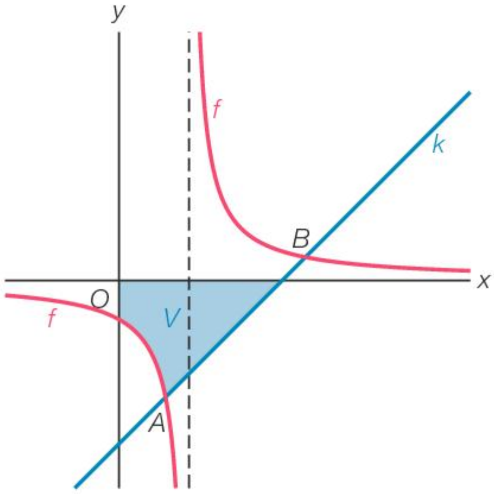
figuur 16.33

Als deze grafiek wordt gewenteld om de horizontale x-as, ontstaat de vorm van de waterstraal (90 graden linksom gedraaid).
De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan de hoeveelheid water waaruit de waterstraal op een bepaald moment bestaat.
Bereken deze hoeveelheid. Rond je eindantwoord af op een geheel aantal cm^3.

21 **2017-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{5}{4x - 6}$.

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in de punten $A(1, -2\frac{1}{2})$ en $B(4, \frac{1}{2})$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. In figuur 16.34 is dit vlakdeel blauw gemaakt.
V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.
Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

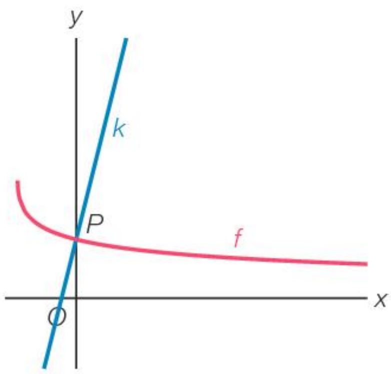


figuur 16.34

22 **2018-II**

Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$ en $g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x}$.

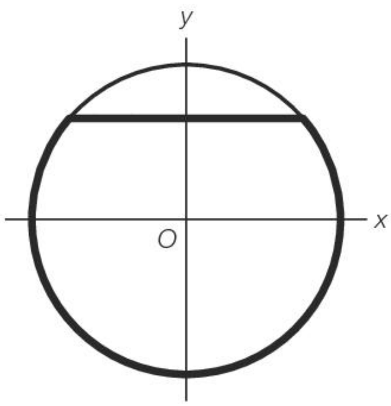
Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g.
In figuur 16.35 zijn de grafiek van f en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P.
Bewijs dat de lijn k de grafiek van f loodrecht snijdt.



figuur 16.35

23 **2018-II**

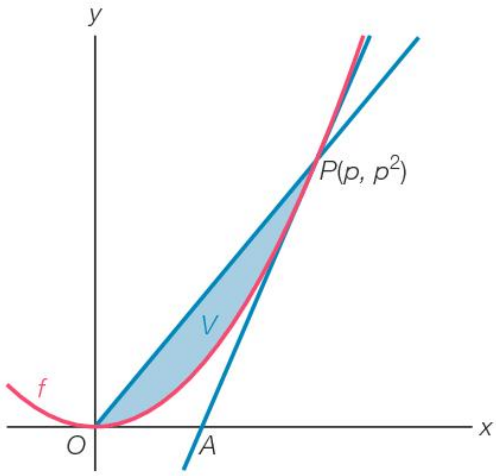
Een ijsbol wordt in een glas water gedaan, waarna de ijsbol in het water drijft. Op het moment dat de ijsbol in het water wordt gedaan, heeft deze een straal van 1,5 cm.
Er geldt dat 92% van het volume van de ijsbol onder water zit en 8% erboven.
Het volume van de ijsbol is dan $\frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 \approx 14{,}137\,\text{cm}^3$.
Het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 2{,}25$ om de y-as.
Zie de figuur.
Bereken hoeveel cm de ijsbol boven het water uitsteekt op het moment dat hij in het water wordt gedaan. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.



figuur 16.36

24 **2018-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$.
De raaklijn aan de grafiek van f in een punt $P(p, p^2)$ met $p > 0$ snijdt de x-as in een punt A.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP. Zie de figuur.
Bewijs dat de oppervlakte van driehoek OAP anderhalf keer zo groot is als de oppervlakte van V.

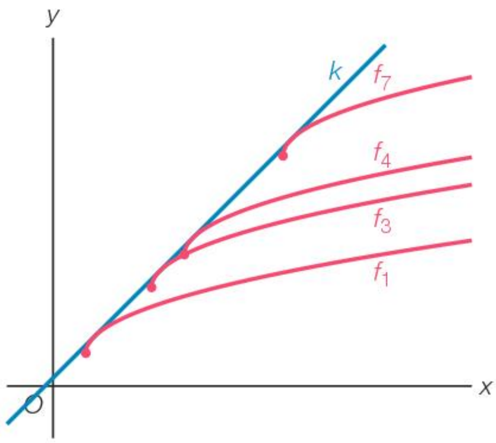


figuur 16.37

25 **2019-I**

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$.
In figuur 16.38 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.
Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

a Bewijs dit.



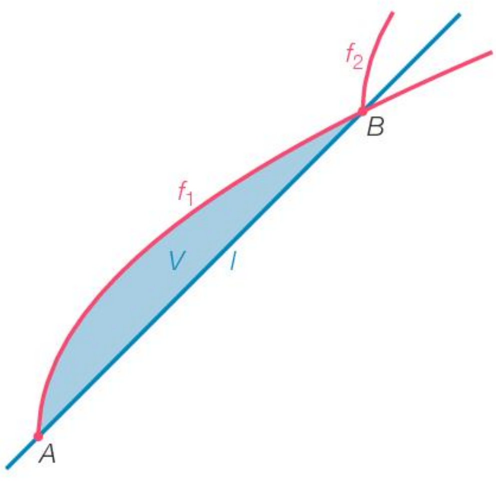
figuur 16.38

Voor $p \geq 1$ heeft de grafiek van f_p een randpunt.
De randpunten van de grafieken in figuur 16.38 zijn met een stip aangegeven.
Er geldt voor elke $p \geq 1$: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

b Bewijs dat inderdaad voor $p \geq 1$ geldt: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

Punt $A(1, 1)$ is het randpunt van de grafiek van f_1.
Punt $B(2, 2)$ is het randpunt van de grafiek van f_2.
B ligt dus op de grafiek van f_1.
Door de punten A en B gaat een lijn l.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn l en de grafiek van f_1.
Zie figuur 16.39.

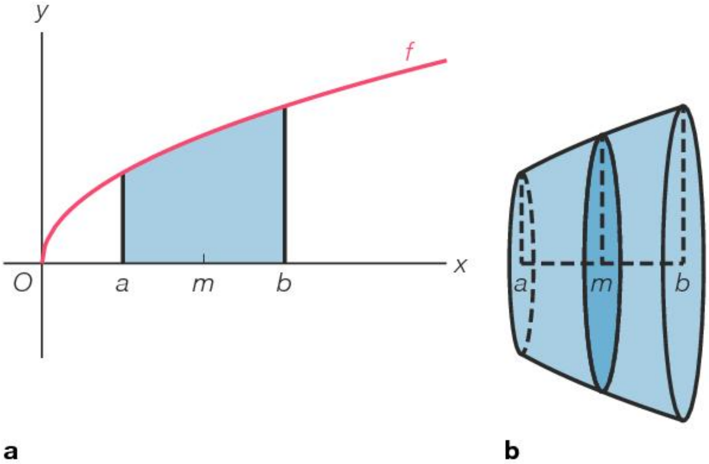
c Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 16.39

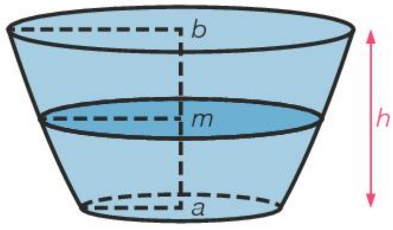
26 **2019-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$. De grafiek van f is getekend in figuur 16.40a, samen met de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = b$, waarbij $0 < a < b$. Midden tussen de punten $(a, 0)$ en $(b, 0)$ ligt het punt $(m, 0)$.
De grafiek van f, de x-as en de twee verticale lijnen sluiten een gebied in. Dit gebied, in figuur 16.40a met lichtblauw aangegeven, wordt gewenteld om de x-as. Het omwentelingslichaam is een zogenaamde *afgeknotte paraboloïde*. Deze is afgebeeld in figuur 16.40b.



figuur 16.40

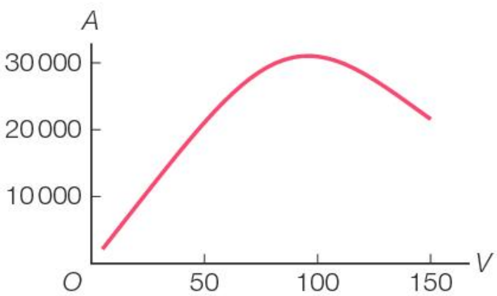
Bij de omwenteling beschrijft elk punt van de grafiek een cirkel.
De oppervlakte van de cirkel die beschreven wordt door het punt $(m, \sqrt{m})$ noemen we A. De cirkelschijf met deze oppervlakte is met donkerblauw aangegeven in figuur 16.40b.
In figuur 16.41 staat de afgeknotte paraboloïde een kwartslag gedraaid. In die figuur is ook de hoogte h van de afgeknotte paraboloïde aangegeven.
Voor de inhoud V van de afgeknotte paraboloïde geldt de formule $V = h \cdot A$.
Bewijs dit.



figuur 16.41

27 **2019-II**

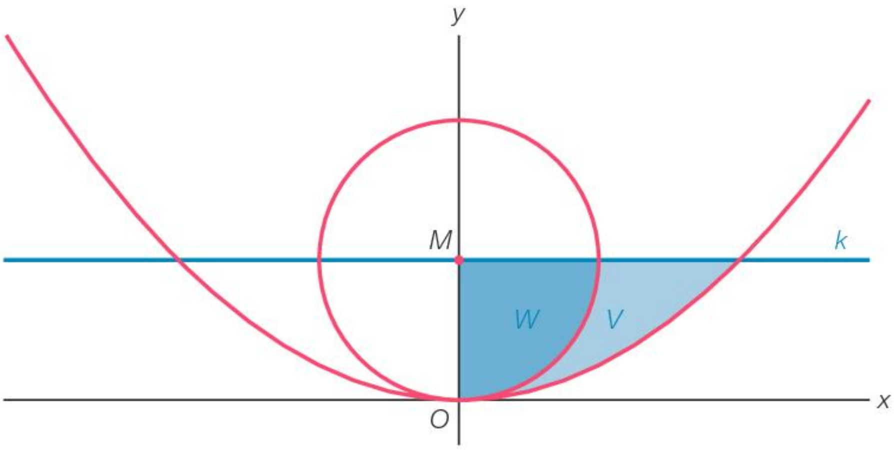
Gegeven is de formule $A = \dfrac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$.
In de figuur is de grafiek van A weergegeven voor $5 \leq V \leq 150$.
Bereken algebraïsch de waarde van V waarvoor A maximaal is. Rond af op één decimaal.



figuur 16.42

28 **2019-II**

Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$ en een punt $M(0, r)$ op de positieve y-as. We bekijken de cirkel met middelpunt M en straal r.
Het punt $O(0, 0)$ ligt op deze cirkel en op de gegeven parabool.
We bekijken de situatie waarin de cirkel en de parabool alleen punt O gemeenschappelijk hebben.
De lijn k gaat door M en is evenwijdig aan de x-as.
V is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de cirkel, de parabool en lijn k. In figuur 16.43 is dit gebied lichtblauw gemaakt.
W is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de cirkel, de y-as en lijn k. In figuur 16.43 is dit gebied donkerblauw gemaakt.



figuur 16.43

Wanneer de cirkel wordt gewenteld om de y-as, ontstaat een bol met inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$.
De gebieden V en W worden gewenteld om de y-as.
Er is een waarde van r waarvoor de inhoud van de omwentelingslichamen van V en W aan elkaar gelijk zijn.
Bereken exact deze waarde van r.

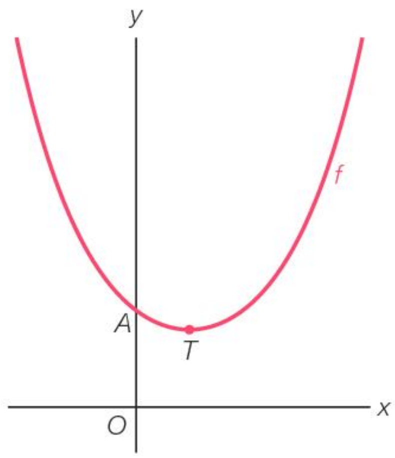
16.4 Exponenten en logaritmen

29 **a** Los de vergelijking $50 + 415 \cdot \log(4x + 3) = 382$ algebraïsch op. Rond het antwoord af op drie decimalen.

b In de formule $x \cdot y^b = c$ zijn b en c constanten. Voor $x = 40$ is $y = 27$ en voor $x = 60$ is $y = 10$. Bereken algebraïsch de waarden van b en c. Geef b in twee decimalen en c als geheel getal.

c Herleid de formule $F = b \cdot e^{-\frac{5G}{H}}$ tot de vorm $G = aH \cdot \ln\left(\frac{b}{F}\right)$.

d Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$. De grafiek van f heeft top $T(p, q)$ en snijdt de y-as in het punt A. Zie figuur 16.44. De formule van de parabool met top $T(p, q)$ die de y-as snijdt in A is van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$. Bereken exact de waarden van a, p en q.

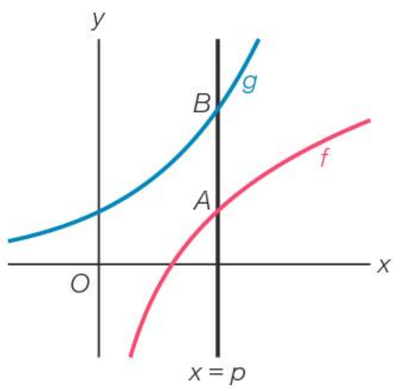


figuur 16.44

e Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + x)$. De grafiek van f wordt 3 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g. Het snijpunt van de grafieken van f en g is het punt A. Onderzoek op algebraïsche wijze of de grafieken van f en g elkaar loodrecht snijden in A.

f Bewijs dat de grafieken van de functies $f(x) = x\,e^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ elkaar loodrecht snijden in de oorsprong.

g Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x\sqrt{x})$. De grafiek van de inverse functie van f wordt 2 naar rechts en 1 naar boven verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g. De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Zie de figuur hiernaast. Bereken de minimale lengte van het lijnstuk AB. Rond je eindantwoord af op drie decimalen.



figuur 16.45

h Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x\sqrt{x})}{\ln(x)}$.

De grafiek van f heeft rechts van de y-as een perforatie. Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

30 **a** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10}$.

De horizontale asymptoot van de grafiek van f snijdt de grafiek in het punt A.

Bereken exact de x-coördinaat van A.

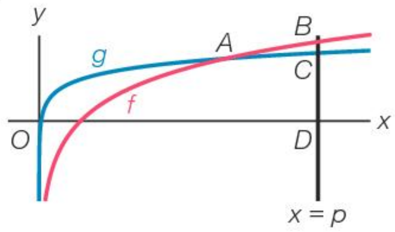
b Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) + 1$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A.

Rechts van A ligt de grafiek van f boven de grafiek van g.

De lijn $x = p$ met $p > x_A$ snijdt de grafiek van f in het punt B, de grafiek van g in het punt C en de x-as in het punt D. Zie de figuur hiernaast.

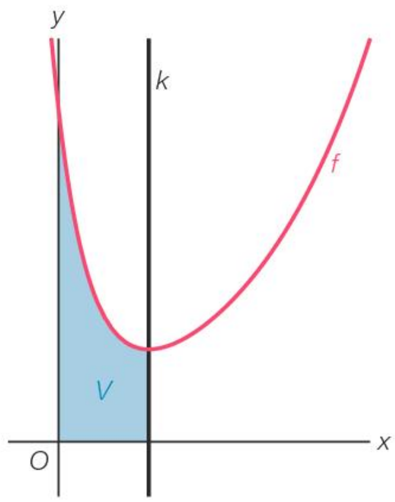
Bewijs dat geldt $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{2\ln(p) - 3}{3\ln(p)}$ en bereken exact de grenswaarde van $\dfrac{BC}{BD}$ als p onbegrensd toeneemt.



figuur 16.46

c Gegeven is de functie $f(x) = 2^x + 2^{3-4x}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de verticale lijn k door de top van de grafiek van f. Zie de figuur hiernaast.

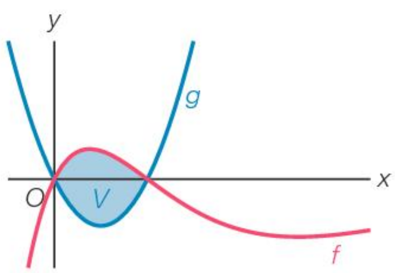
Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf het antwoord in de vorm $\dfrac{a}{b\ln(2)}$ met a en b gehele getallen.



figuur 16.47

d Gegeven zijn de functies $f(x) = (x - x^2)\,e^{-x}$ en $g(x) = x^2 - x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Zie de figuur hiernaast.

Bewijs dat $F(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x}$ een primitieve is van f en bereken exact de oppervlakte van V.

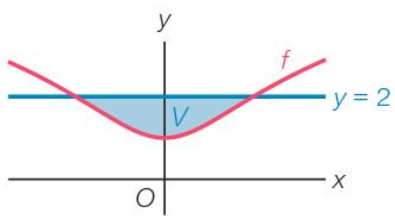


figuur 16.48

e Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + e)$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 2$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt.



figuur 16.49

Exponentiële vergelijkingen exact oplossen

- Veel exponentiële vergelijkingen zijn op te lossen door toe te werken naar de vorm $g^A = g^B$ en dan te gebruiken dat uit $g^A = g^B$ volgt $A = B$.
  Een voorbeeld hiervan is de vergelijking $4^{2x-3} = 32$.
  Bij de vergelijking $2^{x+3} + 2^x = 27$ werk je toe naar de vorm $2^x = c$.
  Daarna gebruik je $x = {}^2\log(c)$.

$4^{2x-3} = 32$	$2^{x+3} + 2^x = 27$
$(2^2)^{2x-3} = 2^5$	$2^x \cdot 2^3 + 2^x = 27$
$2^{4x-6} = 2^5$	$8 \cdot 2^x + 2^x = 27$
$4x - 6 = 5$	$9 \cdot 2^x = 27$
$4x = 11$	$2^x = 3$
$x = 2\frac{3}{4}$	$x = {}^2\log(3)$

- Sommige exponentiële vergelijkingen zijn op te lossen met behulp van een substitutie.

$2^x + \dfrac{10}{2^x} = 7$	$e^{2x} + e^x = 20$
Stel $2^x = u$.	$(e^x)^2 + e^x = 20$
$u + \dfrac{10}{u} = 7$	Stel $e^x = u$.
$u^2 + 10 = 7u$	$u^2 + u = 20$
$u^2 - 7u + 10 = 0$	$u^2 + u - 20 = 0$
$(u-2)(u-5) = 0$	$(u-4)(u+5) = 0$
$u = 2 \vee u = 5$	$u = 4 \vee u = -5$
$2^x = 2 \vee 2^x = 5$	$e^x = 4 \vee e^x = -5$
$x = 1 \vee x = {}^2\log(5)$	$x = \ln(4)$

Logaritmische vergelijkingen exact oplossen

- Oplossen door gebruik te maken van de regel
  uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

$2 + {}^3\log(4x-1) = 4$	$\ln^2(x) = 2\frac{1}{4}$
${}^3\log(4x-1) = 2$	$\ln(x) = 1\frac{1}{2} \vee \ln(x) = -1\frac{1}{2}$
$4x - 1 = 3^2$	$x = e^{1\frac{1}{2}} \vee x = e^{-1\frac{1}{2}}$
$4x = 10$	
$x = 2\frac{1}{2}$	$x = e\sqrt{e} \vee x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$

- Oplossen door toe te werken naar de vorm ${}^g\log(A) = {}^g\log(B)$ en dan te gebruiken dat uit ${}^g\log(A) = {}^g\log(B)$ volgt $A = B$.
  Vaak heb je hierbij de rekenregels voor logaritmen nodig. Op de volgende bladzijde staan deze rekenregels voor natuurlijke logaritmen, maar ze gelden voor elk grondtal $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voor $a > 0$ en $b > 0$ geldt

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$	${}^g\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(g)}$
$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$e^{\ln(a)} = a$
$p \cdot \ln(a) = \ln(a^p)$	$\ln(e^a) = a$

$\ln(x-4) = 2 - \ln(3)$
$\ln(x-4) = \ln(e^2) - \ln(3)$
$\ln(x-4) = \ln(\frac{1}{3}e^2)$
$x - 4 = \frac{1}{3}e^2$
$x = 4 + \frac{1}{3}e^2$

$2 \cdot {}^4\log(x) = 3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(x-1)$
$2 \cdot \dfrac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(4)} = {}^2\log(8) - \dfrac{{}^2\log(x-1)}{{}^2\log(\frac{1}{2})}$
$2 \cdot \dfrac{{}^2\log(x)}{2} = {}^2\log(8) - \dfrac{{}^2\log(x-1)}{-1}$
${}^2\log(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x-1)$
${}^2\log(x) = {}^2\log(8x-8)$
$x = 8x - 8$
$-7x = -8$
$x = 1\frac{1}{7}$

- Oplossen met behulp van een substitutie.

$\ln^2(x) - \ln(x) = 6$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 - u - 6 = 0$
$(u+2)(u-3) = 0$
$u = -2 \vee u = 3$
$\ln(x) = -2 \vee \ln(x) = 3$
$x = e^{-2} \vee x = e^3$
$x = \dfrac{1}{e^2} \vee x = e^3$

$\log(x) = \dfrac{6}{\log(x)} + 5$
Stel $\log(x) = u$.
$u = \dfrac{6}{u} + 5$
$u^2 - 5u - 6 = 0$
$(u+1)(u-6) = 0$
$u = -1 \vee u = 6$
$\log(x) = -1 \vee \log(x) = 6$
$x = \dfrac{1}{10} \vee x = 10^6$

Formules omwerken

- Omwerken van ${}^g\log(N) = pt + q$ tot $N = b \cdot c^t$.
  Bij $\log(N) = 0{,}35t + 2{,}22$ krijg je $N = 10^{0{,}35t + 2{,}22}$
  $N = 10^{0{,}35t} \cdot 10^{2{,}22}$
  $N = 10^{2{,}22} \cdot (10^{0{,}35})^t$
  $N \approx 166 \cdot 2{,}24^t$
  Dus $N = 166 \cdot 2{,}24^t$.

- Omwerken van $N = b \cdot c^t$ tot ${}^g\log(N) = pt + q$.
  Bij het omwerken van de formule $N = 166 \cdot 2{,}24^t$ tot de vorm
  $\ln(N) = pt + q$ krijg je $\ln(N) = \ln(166 \cdot 2{,}24^t)$
  $$\ln(N) = \ln(166) + \ln(2{,}24^t)$$
  $$\ln(N) = t \cdot \ln(2{,}24) + \ln(166)$$
  $$\ln(N) \approx 0{,}81t + 5{,}11$$
  Dus $\ln(N) = 0{,}81t + 5{,}11$.

- Omwerken van ${}^g\log(y) = p + q \cdot {}^g\log(x)$ tot $y = ax^n$.
  Bij $\ln(A) = 1{,}7 + 1{,}6\ln(B)$ krijg je $\ln(A) = \ln(\mathrm{e}^{1{,}7}) + \ln(B^{1{,}6})$
  $$\ln(A) = \ln(\mathrm{e}^{1{,}7} \cdot B^{1{,}6})$$
  $$A = \mathrm{e}^{1{,}7} \cdot B^{1{,}6}$$
  $$A \approx 5{,}47B^{1{,}6}$$
  Dus $A = 5{,}47B^{1{,}6}$.

- Omwerken van $y = ax^n$ tot ${}^g\log(y) = p + q \cdot {}^g\log(x)$.
  Bij het omwerken van de formule $A = 5{,}47B^{1{,}6}$ tot de vorm
  $\log(A) = p + q \cdot \log(B)$ krijg je $\log(A) = \log(5{,}47B^{1{,}6})$
  $$\log(A) = \log(5{,}47) + \log(B^{1{,}6})$$
  $$\log(A) = \log(5{,}47) + 1{,}6\log(B)$$
  $$\log(A) \approx 0{,}74 + 1{,}6\log(B)$$
  Dus $\log(A) = 0{,}74 + 1{,}6\log(B)$.

- Schrijven van de formule $N = 500 \cdot 1{,}75^t$ in de vorm $t = a\ln(bN)$.
  Je krijgt $1{,}75^t = 0{,}002N$
  $$t = {}^{1{,}75}\log(0{,}002N)$$
  $$t = \frac{\ln(0{,}002N)}{\ln(1{,}75)}$$
  $$t = \frac{1}{\ln(1{,}75)} \cdot \ln(0{,}002N)$$
  $$t \approx 1{,}79\ln(0{,}002N)$$
  Dus $t = 1{,}79\ln(0{,}002N)$.

- Schrijven van de formule $A = 8B^{1\frac{1}{2}}$ in de vorm $B = pA^q$.
  Je krijgt $B^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}A$
  $$B = (\tfrac{1}{8}A)^{\frac{2}{3}}$$
  $$B = ((\tfrac{1}{2})^3)^{\frac{2}{3}} \cdot A^{\frac{2}{3}}$$
  $$B = (\tfrac{1}{2})^2 \cdot A^{\frac{2}{3}}$$
  $$B = \tfrac{1}{4}A^{\frac{2}{3}}$$

Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

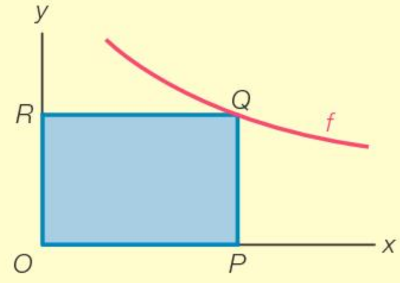
Regels voor het differentiëren.

$f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$	$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

Van de rechthoek *OPQR* ligt het punt *P* op de *x*-as, het punt *Q* op de grafiek van de functie $f(x) = 3 - \ln(x)$ en het punt *R* op de positieve *y*-as. Zie figuur 16.50.
Om de oppervlakte *A* van de rechthoek te maximaliseren stel je $x_P = p$ en druk je *A* uit in *p*.
Dit geeft $A = p(3 - \ln(p)) = 3p - p\ln(p)$.

$$\frac{dA}{dp} = 3 - 1 \cdot \ln(p) - p \cdot \frac{1}{p} = 3 - \ln(p) - 1 = 2 - \ln(p)$$

$\dfrac{dA}{dp} = 0$ geeft $2 - \ln(p) = 0$ en dit geeft $p = e^2$.
De oppervlakte is maximaal voor $p = e^2$.



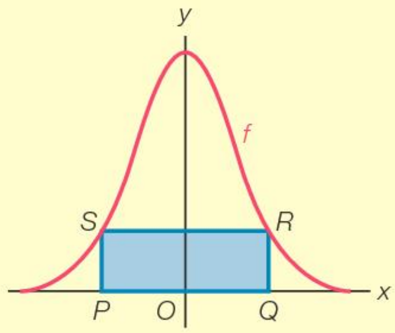
figuur 16.50

Van de rechthoek *PQRS* liggen de punten *P* en *Q* op de *x*-as en de punten *R* en *S* op de grafiek van de functie $f(x) = 4 \cdot 2^{-x^2}$.
Om de oppervlakte *A* van de rechthoek te maximaliseren stel je $x_Q = q$ en druk je *A* uit in *q*.
Dit geeft $A = 2q \cdot 4 \cdot 2^{-q^2} = 8q \cdot 2^{-q^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dq} &= 8 \cdot 2^{-q^2} + 8q \cdot 2^{-q^2} \cdot \ln(2) \cdot -2q \\ &= 8 \cdot 2^{-q^2} - 16q^2 \cdot 2^{-q^2} \cdot \ln(2) \\ &= 8 \cdot 2^{-q^2}(1 - 2q^2 \cdot \ln(2))\end{aligned}$$

$\dfrac{dA}{dq} = 0$ geeft $1 - 2q^2 \cdot \ln(2) = 0$, dus $q^2 = \dfrac{1}{2\ln(2)}$.

De oppervlakte is maximaal voor $q = \sqrt{\dfrac{1}{2\ln(2)}}$.



figuur 16.51

Primitieven van exponentiële en logaritmische functies

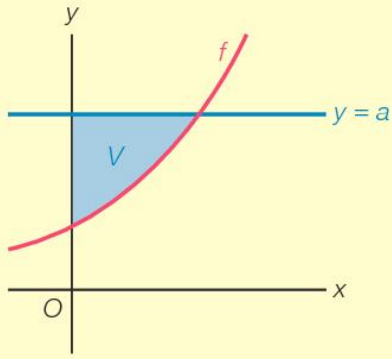
Regels voor het primitiveren.

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = \mathrm{e}^x + c$
$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, de y-as en de lijn $y = a$ met $a > 1$.
Om te berekenen voor welke waarde van a de oppervlakte van V gelijk is aan 2 ga je als volgt te werk.
$f(x) = a$ geeft $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = a$, dus $\frac{1}{2}x = \ln(a)$ oftewel $x = 2\ln(a)$.

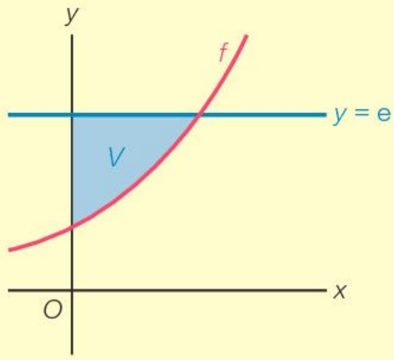
$$O(V) = \int_0^{2\ln(a)} (a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \left[ax - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(a)}$$
$$= a \cdot 2\ln(a) - 2\,\mathrm{e}^{\ln(a)} - (0 - 2\mathrm{e}^0)$$
$$= 2a\ln(a) - 2a + 2$$

$O(V) = 2$ geeft $2a\ln(a) - 2a + 2 = 2$
$2a(\ln(a) - 1) = 0$
$a = 0 \quad \vee \quad \ln(a) = 1$
vold. niet $a = \mathrm{e}$
Dus $O(V) = 2$ voor $a = \mathrm{e}$.



figuur 16.52

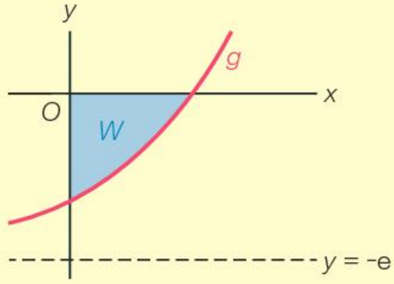
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, de y-as en de lijn $y = \mathrm{e}$. Zie figuur 16.53.
Om de inhoud te berekenen van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = \mathrm{e}$ ga je als volgt te werk.



figuur 16.53

Verschuif de grafiek van f over $(0, -\mathrm{e})$. Zo krijg je de grafiek van $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}$ met het vlakdeel W. Zie figuur 16.54.
Wentelen van W om de x-as geeft $I(L)$.

$$I(L) = \pi\int_0^2 (g(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e})^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^2 (\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} + \mathrm{e}^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} + \mathrm{e}^2x\right]_0^2$$
$$= \pi(\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^0 - 4\mathrm{e}^1 + 0)) = (-\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 1)\pi$$

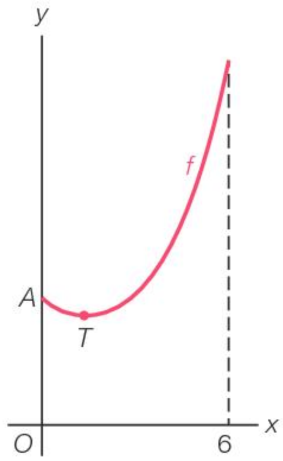


figuur 16.54

31 **2016-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$.
In figuur 16.55 is de grafiek van f, een zogenaamde kettinglijn, op het domein [0, 6] getekend.
Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y-as.
De x-coördinaat van T is ongeveer 1,4.

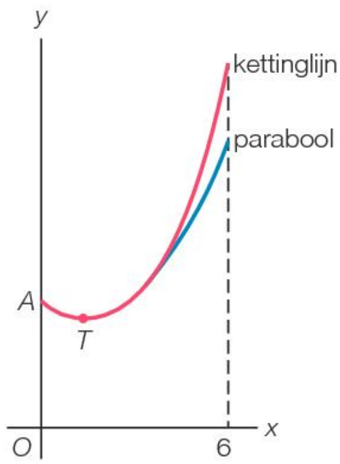
a Bereken exact de waarde van de x-coördinaat van T.



figuur 16.55

In figuur 16.56 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.
In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ worden opgesteld.

b Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.



figuur 16.56

32 **2018-I**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.
Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}.
Er geldt $f^{\text{inv}}(x) = e^2x$.

a Bewijs dat inderdaad geldt $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

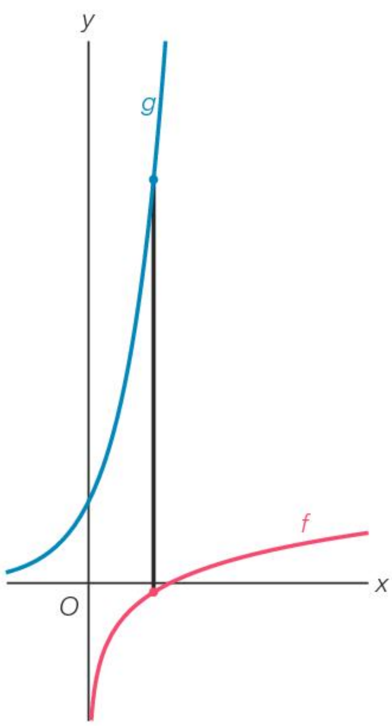
De grafiek van f^{inv} wordt ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Elke verticale lijn rechts van de y-as snijdt de grafiek van f in één punt en de grafiek van g in één punt. Het lijnstuk tussen deze twee punten heeft een lengte die afhangt van de plaats van de verticale lijn. Zie de figuur.

b Bereken de minimale lengte van het lijnstuk. Rond je eindantwoord af op drie decimalen.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$.

De grafiek van h heeft rechts van de y-as één perforatie.

c Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.



figuur 16.57

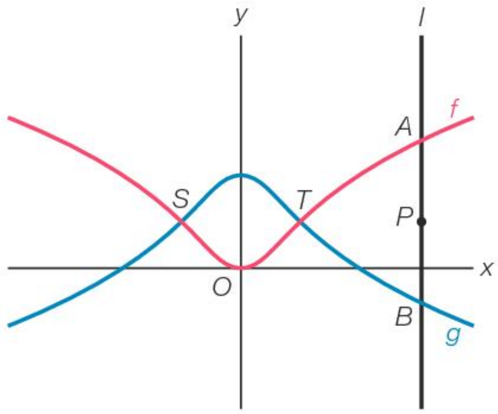
33 **2016-II**

De functies f en g worden gegeven door

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^2}{x^2 + 1}\right)$.

De grafieken van f en g staan in figuur 16.58. Ze snijden elkaar in de punten S en T.
Lijn l met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B. Het punt op lijn l met y-coördinaat 1 noemen we P. In figuur 16.58 is de situatie weergegeven waarbij l rechts van T ligt.

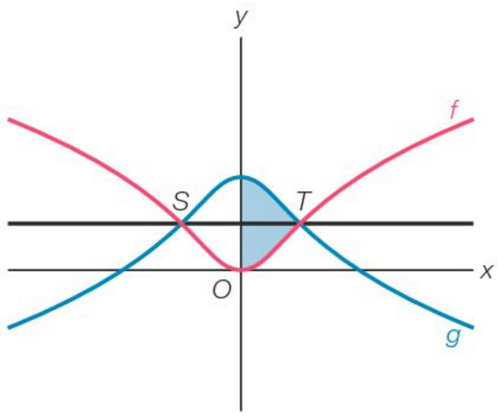
a Bewijs dat in deze situatie $AP = BP$.



figuur 16.58

Ook voor waarden van p waarvoor l niet rechts van T ligt, geldt dat $AP = BP$. Hieruit volgt dat de grafieken van f en g elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking $y = 1$. Deze lijn is getekend in figuur 16.59.
In figuur 16.59 is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y-as blauw gekleurd.
Dit gebied wordt gewenteld om de y-as.

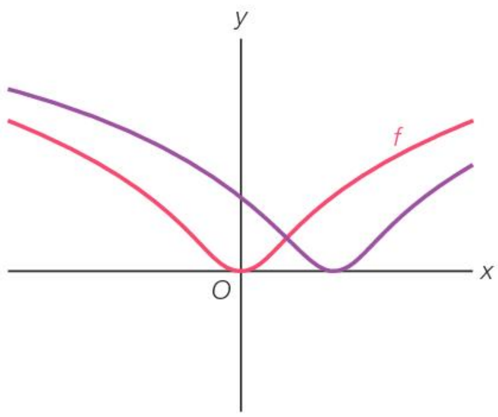
b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.



figuur 16.59

De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven. In figuur 16.60 staan de grafiek van f en de verschoven grafiek.

c Bewijs dat de twee grafieken elkaar loodrecht snijden.



figuur 16.60

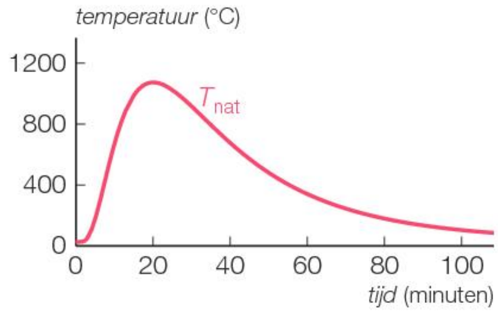
34 **2017-I**

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \dfrac{1}{2e} \cdot x^2$.

Ga na met een exacte berekening of de grafieken van f en g elkaar raken.

35 **2017-I**

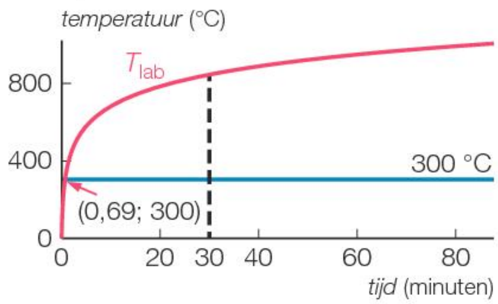
De (lucht)temperatuur tijdens een bepaald soort *natuurlijke brand* kan worden beschreven met het model $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9}$.
Hierin is T_{nat} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 16.61. In de figuur is te zien dat de temperatuur bij deze natuurlijke brand een maximum bereikt.



figuur 16.61

a Bereken exact deze maximale temperatuur.

Deuren worden getest op hun brandwerendheid door ze in een laboratorium aan een brand bloot te stellen. De temperatuur tijdens zo'n *laboratoriumbrand* verloopt anders dan bij de natuurlijke brand, namelijk volgens de formule $T_{lab}(t) = 20 + 345 \cdot \log(8t + 1)$.
Hierin is T_{lab} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 16.62.
Temperaturen onder de 300 °C leveren geen blijvende schade aan de deur op. Pas vanaf een temperatuur van 300 °C heeft een deur onder de brand te lijden. Het tijdstip t waarop deze temperatuur bij de laboratoriumbrand wordt bereikt, is afgerond op twee decimalen 0,69. Zie figuur 16.62.

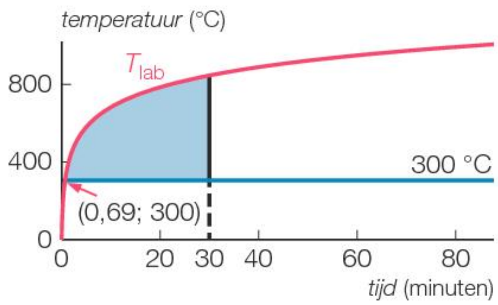


figuur 16.62

b Bereken algebraïsch het tijdstip t waarop de temperatuur bij de laboratoriumbrand de waarde 300 °C bereikt. Rond je antwoord af op drie decimalen.

In de rest van deze opgave bekijken we een deur die wordt blootgesteld aan een laboratoriumbrand. Deze deur blijkt precies 30 minuten stand te houden. Men vraagt zich af hoe berekend kan worden of zo'n deur tijdens de natuurlijke brand óók 30 minuten standhoudt.
In figuur 16.63 is het vlakdeel blauw gemaakt dat wordt ingesloten door de grafiek van T_{lab}, de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = 30$.
De Amerikaan Simon Ingber deed in 1928 de volgende veronderstelling.

> De deur bezwijkt tijdens de natuurlijke brand op dát tijdstip t_b, waarvoor geldt dat de oppervlakte tussen de grafiek van T_{nat}, de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = t_b$ gelijk is aan de oppervlakte van het blauwe vlakdeel in figuur 16.63.



figuur 16.63

c Onderzoek of volgens de veronderstelling van Ingber de deur tijdens de natuurlijke brand minstens 30 minuten standhoudt.

36 **2017-II**

Om een chemische reactie tot stand te brengen is een bepaalde hoeveelheid *activeringsenergie* nodig. De Zweedse scheikundige en Nobelprijswinnaar Svante Arrhenius heeft een vergelijking opgesteld die het verband aangeeft tussen het aantal reagerende moleculen, de temperatuur en de activeringsenergie: $k = A \cdot e^{-\frac{E}{8{,}314T}}$.
Hierin is
- A de constante van Arrhenius;
- E de activeringsenergie (in joule per mol);
- T de temperatuur (in kelvin);
- k een getal dat aangeeft hoeveel moleculen er per seconde reageren.

De vergelijking van Arrhenius kun je herleiden tot de vorm $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.

a Geef een herleiding waaruit dit blijkt.

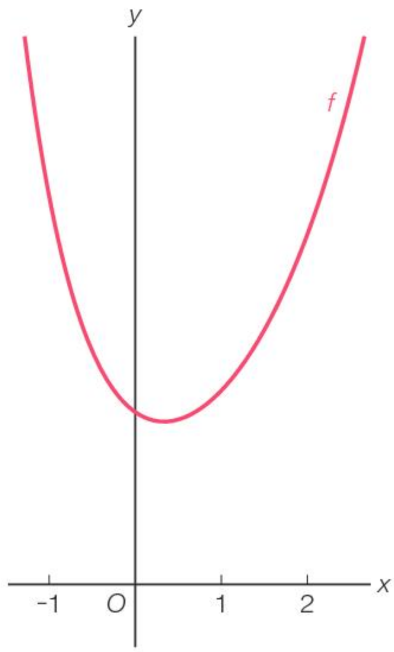
E en A hebben voor elk soort reactie een eigen waarde. De waarden van E en A hangen niet af van de temperatuur. Omdat ze niet direct te meten zijn, meet men bij een reactie de waarde van k bij twee verschillende temperaturen. Hieruit zijn dan met de vergelijking van Arrhenius de bij die reactie horende waarden van E en A te berekenen.
Als voorbeeld bekijken we de chemische reactie waarbij stikstofdioxide wordt omgezet naar stikstofmonoxide en zuurstof.
Voor deze reactie is in een proef vastgesteld dat $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ als $T = 500$ en dat $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ als $T = 550$.

b Bereken de waarde van E van deze reactie. Geef je eindantwoord in de vorm $a \cdot 10^5$, met a afgerond op één decimaal.

37 **2017-II**

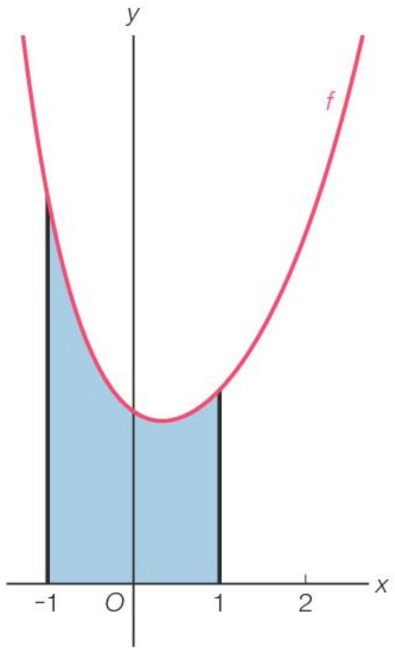
De functie f is gegeven door $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$.
In figuur 16.64 is de grafiek van f weergegeven.
De functie heeft één extreme waarde en dat is een minimum.

a Bereken exact de waarde van x waarvoor $f(x)$ minimaal is.

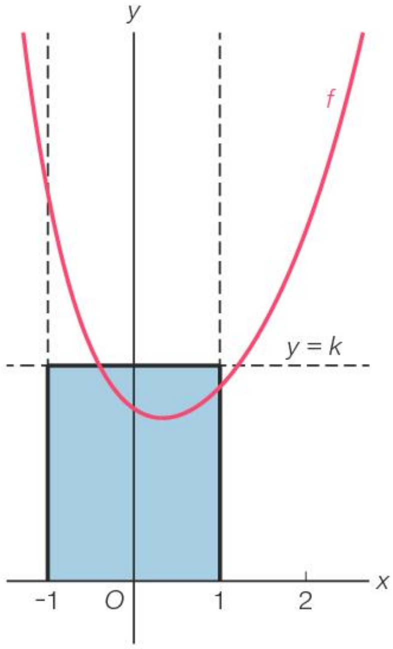


figur 16.64

In figuur 16.65 is het gebied blauw gemaakt dat wordt begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$.
In figuur 16.66 is het rechthoekige gebied blauw gemaakt dat wordt begrensd door de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x = -1$, $x = 1$ en $y = k$.
De waarde van k is zo gekozen dat het blauwe gebied uit figuur 16.65 en het blauwe gebied uit figuur 16.66 dezelfde oppervlakte hebben.



figuur 16.65



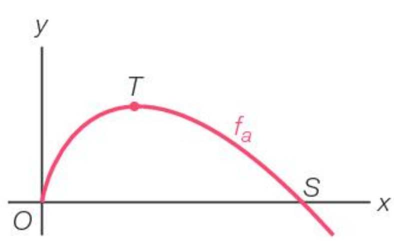
figuur 16.66

b Bereken algebraïsch de waarde van k. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

38 **2018-II**
Voor $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x - x\ln(ax)$.
a Bewijs dat voor elke toegestane waarde van x geldt

$$\frac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x).$$

Voor elke positieve waarde van a geldt
– de grafiek van f_a snijdt de x-as in precies één punt S (met x-coördinaat x_S);
– de grafiek van f_a heeft één top T (met x-coördinaat x_T).
In de figuur zijn voor een waarde van a de grafiek van f_a en de punten S en T weergegeven.



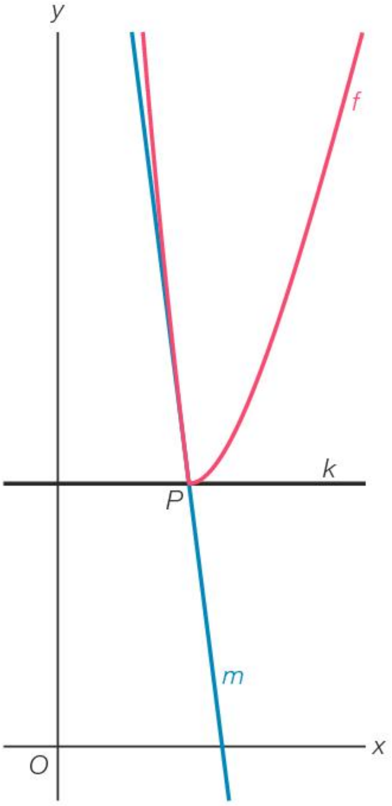
figuur 16.67

b Bewijs dat voor elke positieve waarde van a de verhouding $\frac{x_S}{x_T}$ constant is.

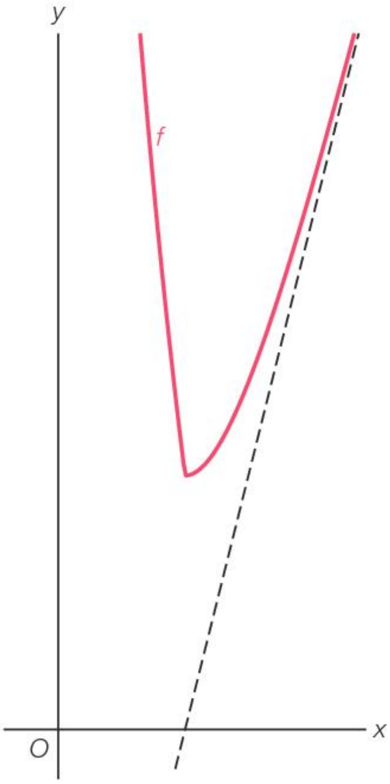
39 **2017-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{2-x} + |8 - 4x|$.
De grafiek heeft een knik in het punt P. Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen.
De raaklijn in P aan het linkerdeel van de grafiek van f is lijn m.
De raaklijn in P aan het rechterdeel van de grafiek van f is lijn k.
In figuur 16.68 zijn de grafiek van f en de raaklijnen k en m weergegeven.

a Bereken exact zowel van k als van m de richtingscoëfficiënt.



figuur 16.68



figuur 16.69

De grafiek van f heeft een asymptoot.
Deze is in figuur 16.69 aangegeven.

b Bepaal op exacte wijze een vergelijking van deze asymptoot.

40 **2019-I**

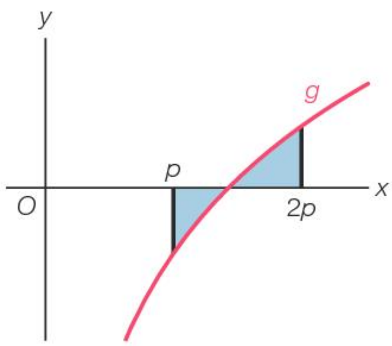
De functies f en g worden gegeven door $f(x) = x\ln(x) - x + 1$ en $g(x) = f'(x)$.

a Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

Er is één waarde van p waarvoor geldt $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.

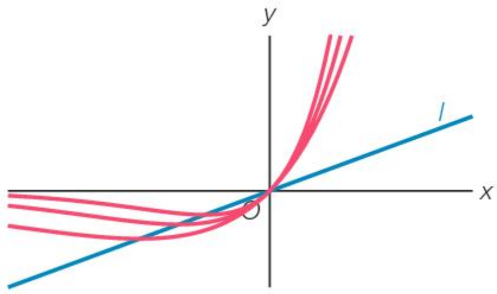
b Bereken exact deze waarde van p. Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = a\mathrm{e}$, waarbij a een getal is.



figuur 16.70

41 **2018-I**

Voor elke waarde van a met $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$.
De afgeleide functie f_a' wordt gegeven door $f_a'(x) = \mathrm{e}^{ax} + ax\,\mathrm{e}^{ax}$.
In figuur 16.71 zie je voor een aantal waarden van a de grafiek van f_a. Ook is de lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$ weergegeven.



figuur 16.71

Voor elke waarde van a met $a > 0$ heeft de grafiek van f_a precies één top.

a Bewijs dat deze top op lijn l ligt.

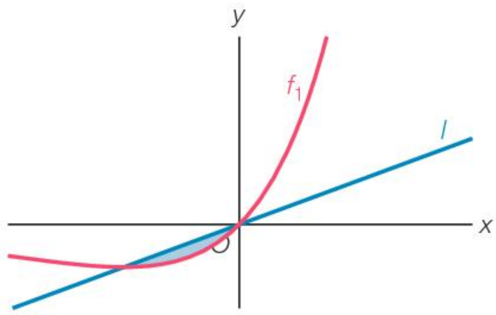
De functie F_a is gegeven door $F_a(x) = \frac{1}{a}x\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}$.

F_a is een primitieve van f_a.

b Bewijs dat F_a inderdaad een primitieve van f_a is.

Voor f_1 geldt $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^x$. In figuur 16.72 is de grafiek van f_1 getekend, en ook lijn l. Het vlakdeel tussen lijn l en de grafiek van f_1 is blauw gemaakt.

c Bereken exact de oppervlakte van het blauwe vlakdeel.



figuur 16.72

42 **2019-II**

In de metaalindustrie worden met een boormachine gaten in harde materialen geboord. De levensduur van een boor is afhankelijk van de *(snij)snelheid*, dit is de snelheid waarmee de buitenkant van de boor door het metaal snijdt. Bij een hoge snelheid zal de boor snel slijten waardoor de levensduur kort is.
Rond 1900 stelde F.W. Taylor het verband $V \cdot T^m = C$ vast. Hierin is:

– V de (snij)snelheid van de boor (in meter per minuut (m/min)) (V ligt vaak tussen de 5 en 150 m/min),
– T de levensduur (in minuten),
– m een constante die afhangt van het materiaal waarvan de boor is gemaakt,
– C een constante die afhangt van het materiaal waarin wordt geboord.

De waarden van m en C worden experimenteel bepaald.
De resultaten van een meting in een bepaalde situatie zijn:

– Bij een snelheid van 20 m/min is de levensduur 116 minuten.
– Bij een snelheid van 30 m/min is de levensduur 40 minuten.

Bereken algebraïsch de waarden van m en C in deze situatie. Geef m in twee decimalen en C als geheel getal.

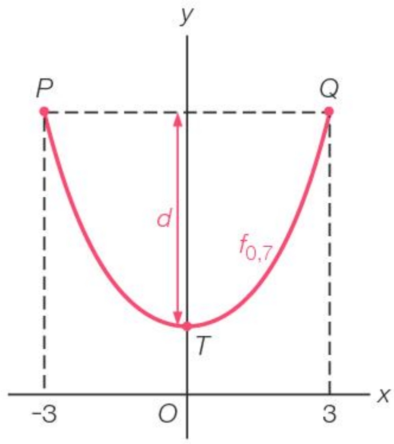
43 **2018-I**

Voor elke waarde van k met $k > 0$ wordt de functie f_k gegeven door $f_k(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$.

De grafiek van f_k wordt een *kettinglijn* genoemd.
Op de grafiek van f_k worden twee punten P en Q met gelijke y-coördinaat gekozen. De lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q noemen we l. De top T van de kettinglijn ligt op de y-as. De afstand van T tot de horizontale lijn PQ noemen we d. Zie figuur 16.73.

Er geldt $k = \frac{8d}{l^2 - 4d^2}$.

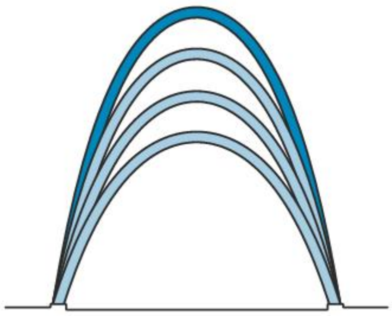
In figuur 16.73 is voor $k = 0{,}7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$ het bijbehorende deel van de kettinglijn getekend.



figuur 16.73

a Bereken voor de situatie van figuur 16.73 de lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Als het deel van de grafiek van f_k tussen P en Q wordt gespiegeld in de x-as en vervolgens omhoog wordt geschoven, ontstaat een boog.
Bij de bouw van de Sheffield Winter Garden, een in 2003 geopende plantenkas, is gebruikgemaakt van dergelijke bogen. Zie de foto.
De ontwerpers hebben een tekening gemaakt van het vooraanzicht van het gebouw. Dit vooraanzicht bestaat uit acht bogen. Zie figuur 16.74. In de rest van deze opgave kijken we naar de grootste boog. Deze boog is in figuur 16.74 donkerblauw gedrukt.



figuur 16.74

Voor de grootste boog in deze tekening geldt
- de lengte van de boog is 49,63 meter;
- het hoogste punt van de boog bevindt zich 20,51 meter boven de grond.

Bij deze grootste boog gaan we een functievoorschrift opstellen.
We kiezen daartoe een assenstelsel waarbij de x-as door de onderste punten van de boog gaat en de top van de boog op de y-as ligt.
De eenheden langs de assen zijn meters.
In dit assenstelsel wordt de boog weergegeven door de grafiek van een functie h.
De grafiek van deze functie h ontstaat door de grafiek van een functie f_k te spiegelen in de x-as en de beeldgrafiek vervolgens omhoog te schuiven.
Er is precies één waarde van k waarvoor de beeldgrafiek de juiste lengte en hoogte heeft.

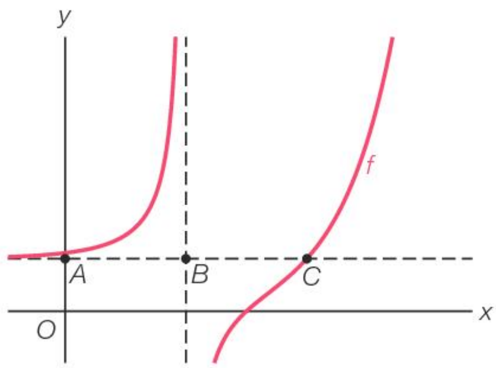
b Stel een functievoorschrift op van h. Rond de getallen in je eindantwoord af op twee decimalen.

44 **2019-II**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10}$.

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot en een verticale asymptoot. In de figuur is de grafiek van f met de beide asymptoten weergegeven. De twee asymptoten snijden elkaar in het punt B. Het punt A is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de y-as. Het punt C is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de grafiek van f.

Bewijs dat B het midden is van lijnstuk AC.



figuur 16.75

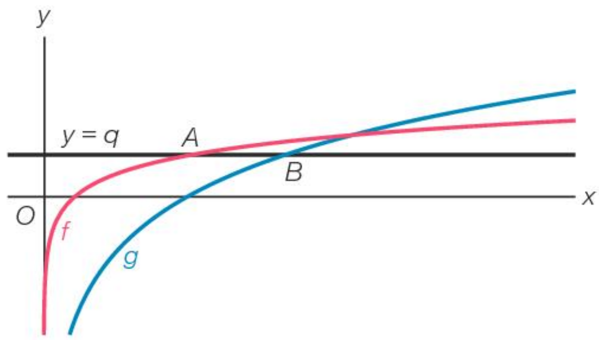
45 **2019-II**

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \log(\sqrt{x})$ en $g(x) = \log(x\sqrt{x}) - 1$.

De lijn met vergelijking $y = q$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Zie figuur 16.76.

Er zijn waarden van q waarvoor A links van B ligt en de lengte van lijnstuk AB gelijk is aan 3.

a Bereken deze waarden van q. Geef je eindantwoorden in twee decimalen.



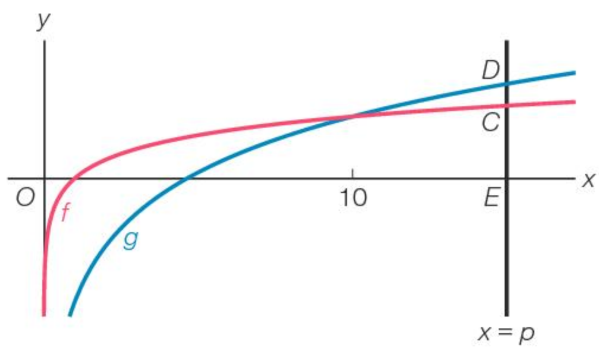
figuur 16.76

Het snijpunt van de twee grafieken ligt bij $x = 10$.

Gegeven is $p > 10$. De lijn met vergelijking $x = p$ ligt dan rechts van het snijpunt van de twee grafieken.

De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt C, de grafiek van g in het punt D en de x-as in het punt E.

Doordat $p > 10$, ligt D boven C. Zie figuur 16.77.



figuur 16.77

De verhouding tussen de lengte van lijnstuk CD en de lengte van lijnstuk CE hangt af van p. Er geldt $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$.

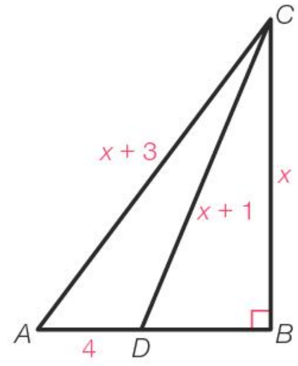
b Bewijs dat deze formule voor $\dfrac{CD}{CE}$ juist is.

Als p onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\dfrac{CD}{CE}$ tot een grenswaarde.

c Bereken exact deze grenswaarde.

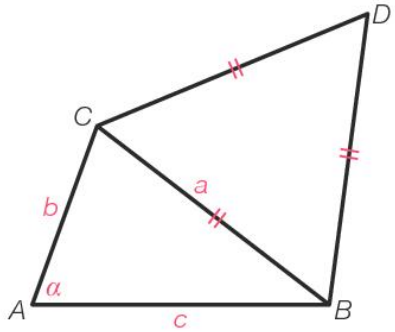
16.5 Meetkunde

46 **a** Driehoek ABC is rechthoekig in B. De lengte van AC is 3 meer dan de lengte van BC. Op de zijde AB ligt het punt D waarbij $AD = 4$ en de lengte van CD gelijk is aan de lengte van BC plus 1. Zie de figuur hiernaast waarbij de lengte van BC gelijk is gesteld aan x.
Bereken exact de lengte van BC.



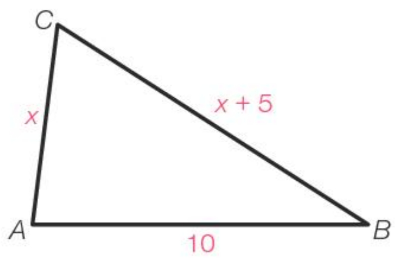
figuur 16.78

b Gegeven is driehoek ABC met de zijden a, b en c en $\angle A = \alpha$. Op de zijde BC wordt de gelijkzijdige driehoek BCD geplaatst. Zie de figuur hiernaast.
Druk de oppervlakte van driehoek BCD uit in b, c en α.



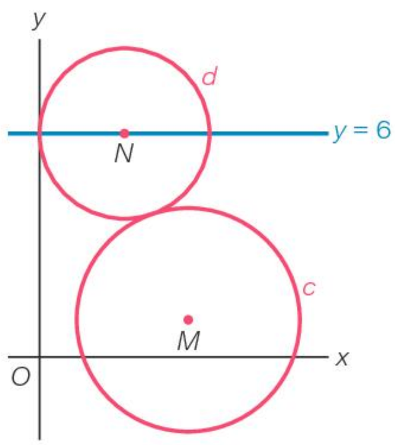
figuur 16.79

c Van driehoek ABC is $AB = 10$ en heeft BC een lengte die 5 meer is dan AC. In de figuur hiernaast is $AC = x$ gesteld. Er geldt dan dat $BC = x + 5$.
Bewijs dat geldt $\cos(\angle A) = \dfrac{15 - 2x}{4x}$ en gebruik dit om de limiet van de grootte van $\angle A$ te berekenen die je krijgt als x onbegrensd toeneemt. Geef je antwoord in graden.



figuur 16.80

d Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$.
De cirkel d met het middelpunt N op de lijn $y = 6$ raakt de y-as en c. Zie figuur 16.81.
Bereken exact de straal van d.



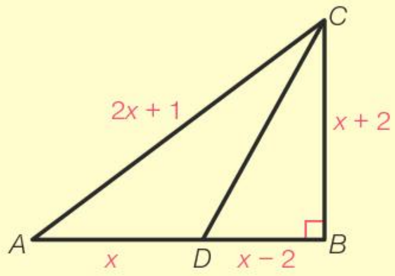
figuur 16.81

e Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de parabool $y = x^2$ met de cirkel met middelpunt $M(0, 1)$ en straal $\sqrt{7}$.

f De punten $A(-1, -1)$ en $B(4, -2)$ liggen op de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$. Op c liggen twee punten C waarbij driehoek ABC een gelijkbenige driehoek is met top C, dus met $AC = BC$.
Bereken exact van beide punten C waarvoor dit het geval is de x-coördinaat.

Pythagoras en vergelijkingen

In de driehoek ABC hiernaast ligt het punt D op de zijde AB. De lengte van BD is 2 minder dan de lengte van AD, de lengte van BC is 2 meer dan de lengte van AD en de lengte van AC is twee keer de lengte van AD plus 1.
Om de lengte van CD te berekenen, stel je $AD = x$.
Dan is $BD = x - 2$, $BC = x + 2$ en $AC = 2x + 1$.
Dus de lengte van AB is $x + x - 2 = 2x - 2$.
De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft
$(2x - 2)^2 + (x + 2)^2 = (2x + 1)^2$.
Oplossen van deze vergelijking geeft $x = 1 \vee x = 7$.
Omdat $x = 1$ niet voldoet, is $AD = 7$.
Dan is $BD = 5$ en $BC = 9$.
De stelling van Pythagoras in driehoek BCD geeft
$CD^2 = 5^2 + 9^2 = 106$, dus $CD = \sqrt{106}$.

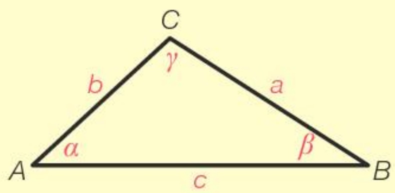


figuur 16.82

De sinusregel en de cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



figuur 16.83

Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet in elk geval een zijde met een overstaande hoek zijn gegeven.
In het geval één hoek en twee zijden zijn gegeven, kan het zijn dat er twee driehoeken mogelijk zijn.

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

De cosinusregel gebruik je
- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

De hoek tussen twee lijnen

De hoek tussen twee lijnen waarvan de vergelijkingen zijn gegeven, bereken je met behulp van richtingshoeken.
Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = \text{rc}_k$ en $-90° < \alpha \leq 90°$.
Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt
$\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$
$\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.

Als voor de lijnen k en l geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.
Deze laatste regel kun je ook gebruiken om een vergelijking van een middelloodlijn op te stellen. De middelloodlijn van het lijnstuk AB is de lijn die door het midden M van AB gaat en loodrecht op AB staat.
Bij de middelloodlijn m van het lijnstuk AB met $A(1, 2)$ en $B(5, 4)$ krijg je $\text{rc}_{AB} = \dfrac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_m = -2$. Invullen van de coördinaten $(3, 3)$ van het midden van AB in $y = -2x + b$ geeft $b = 9$, dus $m\colon y = -2x + 9$.

Afstanden bij punten en lijnen

Voor het berekenen van de afstand tussen de punten $A(x_A, x_B)$ en $B(x_A, x_B)$ gebruik je $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Voor het berekenen van de afstand tussen het punt $P(x_P, y_p)$ en de lijn $k\colon ax + by = c$ gebruik je de afstandsformule $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Cirkelvergelijkingen

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Is een cirkel gegeven in deze laatste vorm, dan is deze met kwadraatafsplitsen te schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ en hieruit zijn dan de straal en de coördinaten van het middelpunt af te lezen.

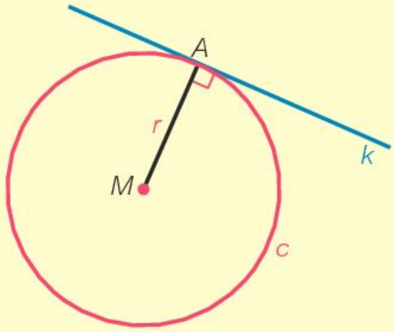
Zo krijg je bij $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 54\frac{3}{4} = 0$

$$x^2 + 10x + y^2 - 12y + 54\tfrac{3}{4} = 0$$
$$(x + 5)^2 - 25 + (y - 6)^2 - 36 + 54\tfrac{3}{4} = 0$$
$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 6\tfrac{1}{4}$$

Dus de straal is $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-5, 6)$.

Cirkels en raaklijnen

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dus in figuur 16.84 staat de lijn door M en A loodrecht op k. Ook is $d(M, A) = r$, waarbij r de straal van de cirkel is.



figuur 16.84 De lijn k raakt de cirkel c in het punt A.

We onderscheiden vier raaklijnproblemen.
1. Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
   - een cirkel
   - een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.
2. Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven is
   - het middelpunt van c
   - een lijn waaraan c raakt.
3. Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
   - een cirkel waaraan k raakt
   - de richting van k.
4. Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
   - een cirkel waaraan k raakt
   - een punt buiten de cirkel op k.

Bij de laatste drie raaklijnproblemen kun je de afstandsformule gebruiken.
Bij het eerste raaklijnprobleem gebruik je het volgende werkschema.

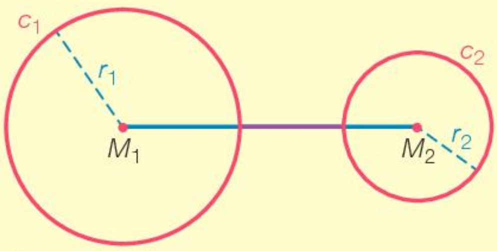
Werkschema: het opstellen van een vergelijking van een raaklijn *k* aan een cirkel *c* met middelpunt *M* in een gegeven punt *A* op *c*.

1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2 Gebruik $k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Afstanden bij cirkels

Voor de afstand van een punt A tot een cirkel c met middelpunt M en straal r geldt
- $d(A, c) = r - d(M, A)$ als A binnen c ligt
- $d(A, c) = d(M, A) - r$ als A buiten c ligt.

Voor de afstand tussen cirkel c_1 met middelpunt M_1 en straal r_1 en cirkel c_2 met middelpunt M_2 en straal r_2 in de figuur hiernaast geldt
$d(c_1, c_2) = d(M_1, M_2) - r_1 - r_2$.



figuur 16.85

Snijpunten bij cirkels

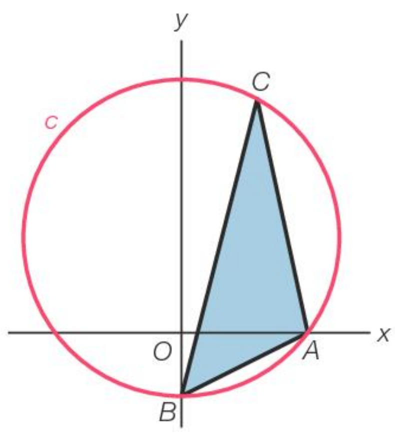
- *Snijpunten van een lijn en een cirkel*
  Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn k: $x - 2y = -3$ en de cirkel c: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ te berekenen, schrijf je de vergelijking van k in de vorm $x = 2y - 3$ en substitueer je dit in de vergelijking van c. Je krijgt $(2y - 3)^2 + y^2 - 8(2y - 3) - 2y + 7 = 0$.
  Oplossen van deze vergelijking geeft $y = 2 \vee y = 4$.
  $y = 2$ geeft $x = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ en $y = 4$ geeft $x = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, dus de snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 4)$.

- *Snijpunten van twee cirkels*
  Bij het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ en d: $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 55 = 0$ los je het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 2y + 55 = 0 \end{cases}$ op.
  Aftrekken van beide vergelijkingen geeft $8x - 4y - 48 = 0$ en dit is te herleiden tot $y = 2x - 12$. Substitutie van $y = 2x - 12$ in de vergelijking van c geeft $x^2 + (2x - 12)^2 - 8x - 2(2x - 12) + 7 = 0$. Oplossen van deze vergelijking geeft $x = 5 \vee x = 7$.
  $x = 5$ geeft $y = 2 \cdot 5 - 12 = -2$ en $x = 7$ geeft $y = 2 \cdot 7 - 12 = 2$, dus de snijpunten zijn $(5, -2)$ en $(7, 2)$.

47 **2017-II**

In een assenstelsel liggen de punten $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$ op de cirkel c: $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.
We bekijken in deze opgave driehoeken ABC met punt C op de grote cirkelboog AB. Zie de figuur.
Er zijn twee plaatsen van C op de cirkel waarbij driehoek ABC een rechthoekige driehoek is.

a Bereken exact voor één van deze twee plaatsen de coördinaten van C.



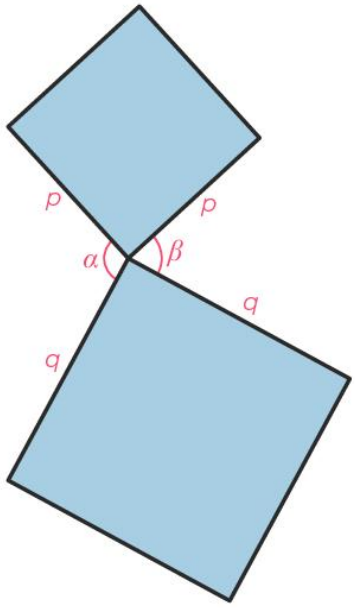
figuur 16.86

Voor een bepaalde plaats van C op de cirkel is driehoek ABC een gelijkbenige driehoek met top A, dus met $AB = AC$.

b Bereken exact de coördinaten van C waarvoor dat het geval is.

48 **2016-I**

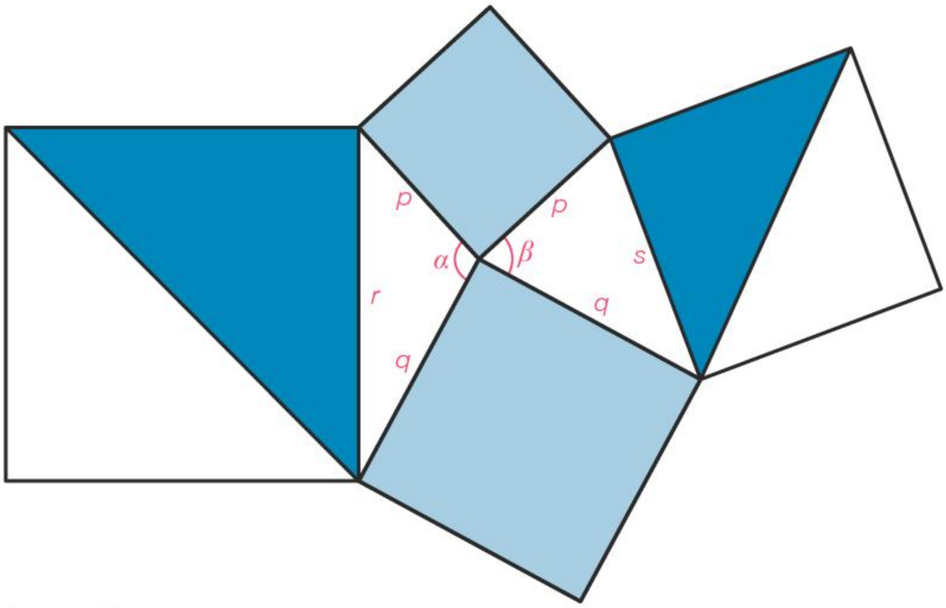
Gegeven zijn twee vierkanten, één met zijde p en één met zijde q. De vierkanten hebben één hoekpunt gemeenschappelijk.
De hoeken die de zijden van de vierkanten met elkaar maken in het gemeenschappelijke hoekpunt noemen we α en β. Zie figuur 16.87.



figuur 16.87

Figuur 16.88 is een uitbreiding van figuur 16.87. Er zijn twee vierkanten toegevoegd:

- een vierkant met zijde r dat met elk van de vierkanten uit figuur 16.87 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft;
- een vierkant met zijde s dat met elk van de vierkanten uit figuur 16.87 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft.



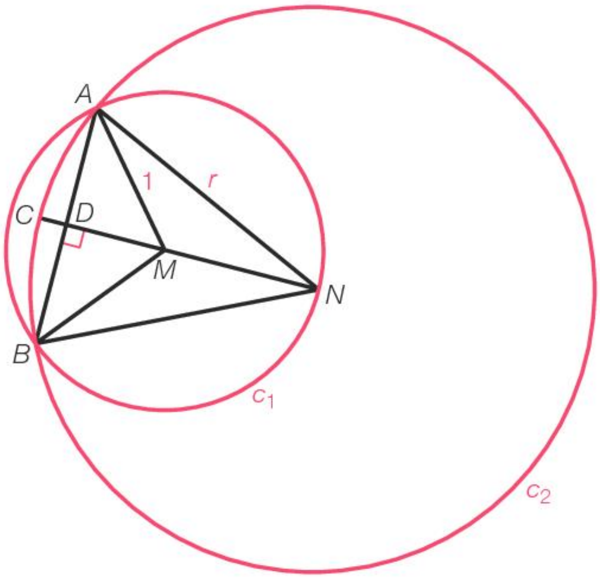
figuur 16.88

In figuur 16.88 zijn de vierkanten met zijden p en q licht gekleurd. Van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donker gekleurd.
Bewijs dat de totale oppervlakte van de licht gekleurde delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donker gekleurde delen.

49 **2016-II**

Gegeven is cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt M. Op de cirkel ligt punt N. Punt N is het middelpunt van cirkel c_2 met straal r waarbij $1 < r < 2$.
De twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 16.89.
Lijn MN snijdt cirkel c_2 in punt C en lijnstuk AB in punt D. Lijnstuk AB staat loodrecht op lijn MN.
Er geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$.

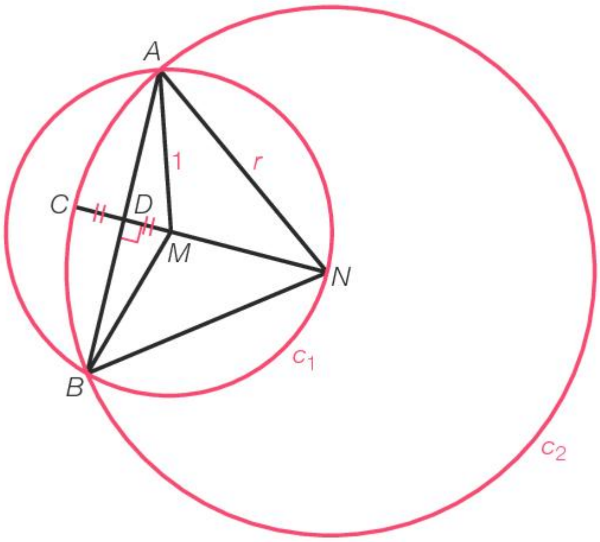
a Bewijs dat inderdaad geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$.



figuur 16.89

Je kunt de waarde van r zo kiezen dat CD en DM even lang zijn. Dan ontstaat de situatie in figuur 16.90.

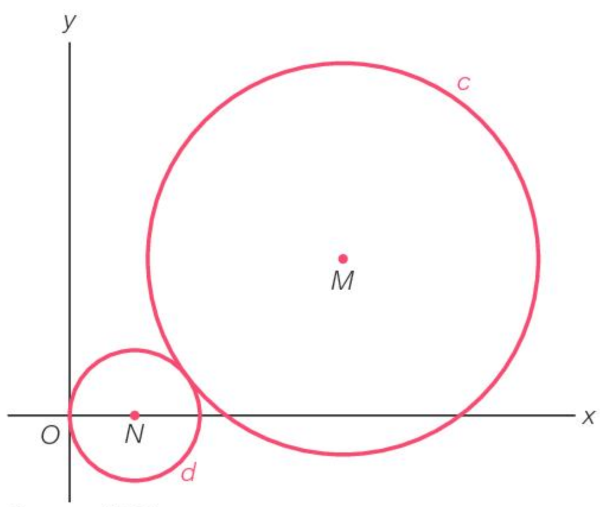
b Bereken exact deze waarde van r.



figuur 16.90

50 **2018-I**

[▶ WERKBLAD] Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(14, 8)$ en straal 10.
De cirkel d met middelpunt N raakt de y-as in de oorsprong O en raakt cirkel c zoals weergegeven in figuur 16.91. Deze figuur staat ook op het werkblad.
Bereken exact de straal van cirkel d. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

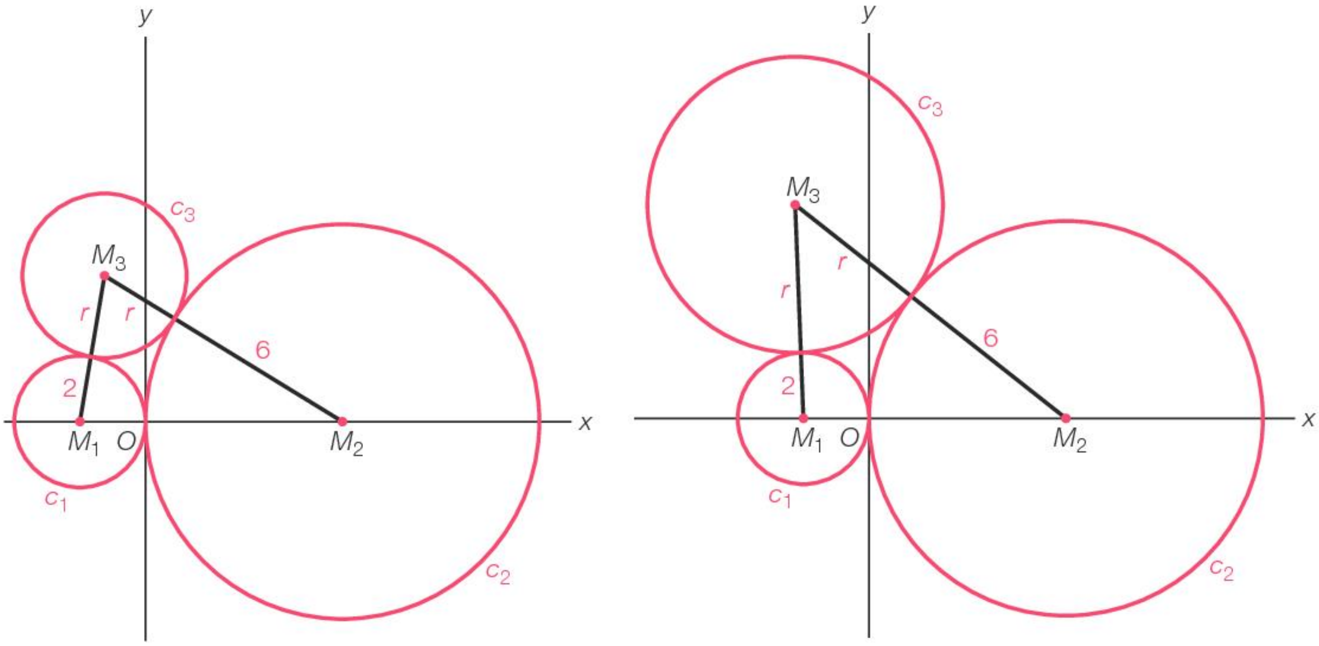


figuur 16.91

51 **2017-I**

Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2. Cirkel c_1 heeft middelpunt $M_1(-2, 0)$ en straal 2. Cirkel c_2 heeft middelpunt $M_2(6, 0)$ en straal 6.
Voor elke positieve waarde van r is er één cirkel c_3 met middelpunt M_3 en straal r zó dat geldt
- M_3 ligt boven de x-as
- c_3 raakt aan cirkel c_1 én aan cirkel c_2.

In figuur 16.92a is de situatie getekend voor $r = 2\frac{1}{2}$ en in figuur 16.92b voor $r = 4\frac{1}{2}$. Verder is in beide figuren driehoek $M_1M_2M_3$ getekend.



a $r = 2\frac{1}{2}$ **b** $r = 4\frac{1}{2}$

figuur 16.92

De grootte van $\angle M_1M_2M_3$ is afhankelijk van r:

voor elke waarde van r geldt

$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r + 12}{2r + 12}.$$

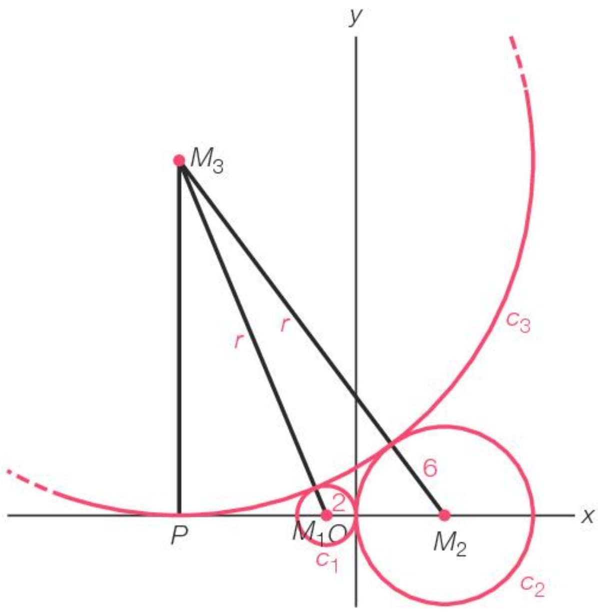
a Bewijs de juistheid van deze formule.

Als r onbegrensd toeneemt, nadert de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ tot een limiet.

b Bereken exact deze limiet in graden.

Er is één waarde van r waarvoor c_3 niet alleen raakt aan c_1 en c_2, maar ook aan de x-as. In figuur 16.93 is deze situatie weergegeven, waarbij cirkel c_3 voor een deel is getekend. Cirkel c_3 raakt de x-as in punt P.

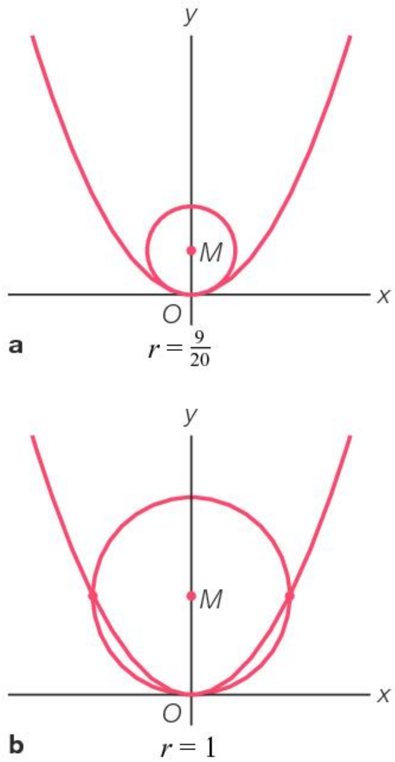
c Bereken exact de waarde van r in deze situatie.



figuur 16.93

52 **2019-II**

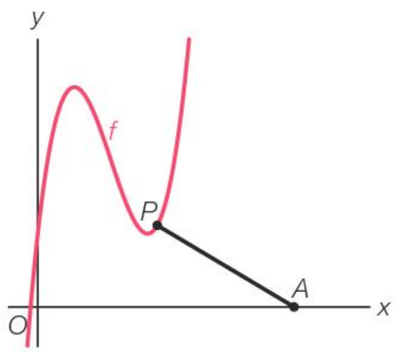
Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$ en een punt $M(0, r)$ op de positieve y-as. We bekijken de cirkel met middelpunt M en straal r.
Het punt $O(0, 0)$ ligt op deze cirkel en op de gegeven parabool.
Afhankelijk van de waarde van r hebben de cirkel en de parabool één gemeenschappelijk punt of drie gemeenschappelijke punten.
In figuur 16.94a is de situatie met $r = \frac{9}{20}$ getekend, waarbij er één gemeenschappelijk punt is.
In figuur 16.94b is de situatie met $r = 1$ getekend, met drie gemeenschappelijke punten.
Bereken exact voor welke waarden van r de cirkel en de parabool drie gemeenschappelijke punten hebben.



figuur 16.94

53 **2019-II**

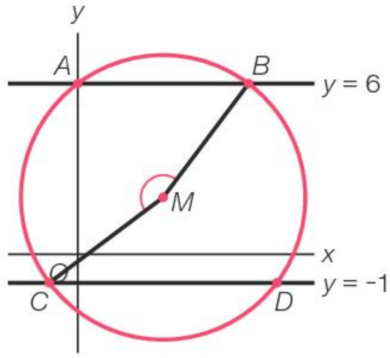
De functie f wordt gegeven door $f(x) = x(x - 3)^2 + 2$.
Op de grafiek van f ligt het punt P. Verder is gegeven het punt $A(7, 0)$. Zie de figuur.
De lengte van lijnstuk AP hangt af van de positie van P.
In de figuur is P zó gekozen dat de lengte van lijnstuk AP minimaal is.
Bereken deze minimale lengte. Geef je eindantwoord in twee decimalen.



figuur 16.95

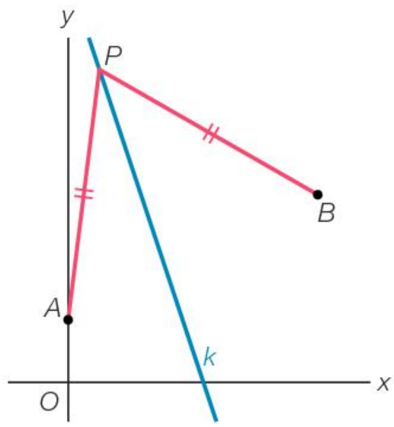
16.6 Vectoren en bewegingsvergelijkingen

54 **a** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ met middelpunt M. De lijn $y = 6$ snijdt c in de punten A en B en de lijn $y = -1$ snijdt c in de punten C en D. Zie de figuur hiernaast. De kleinste hoek BMC is in de figuur met een boogje aangegeven.
Bereken deze hoek. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



figuur 16.96

b Gegeven zijn de punten $A(0, 1)$ en $B(4, 3)$.
Het punt P beweegt over de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Bereken exact de coördinaten van P in de situatie dat $AP = BP$. Zie figuur 16.97.



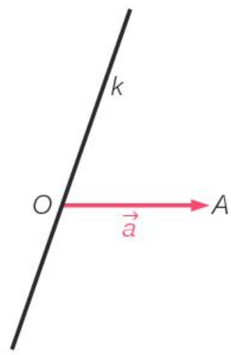
figuur 16.97

c Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{4}x + 1$. Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(5, 1)$.
Verder ligt een punt P op de grafiek van f waarbij de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AP}$ loodrecht op elkaar staan.
Bereken exact de coördinaten van P.

d Gegeven zijn de lijnen k: $3x + 4y = 12$ en
l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Het punt P beweegt over de lijn l. Er zijn twee posities van P waarvoor een cirkel met middelpunt P bestaat die zowel raakt aan de x-as als aan de lijn k.
Bereken exact van beide cirkels de straal.

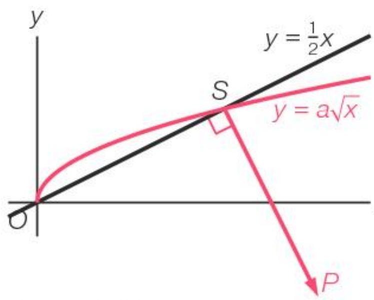
e Het punt P beweegt over de lijn k: $4x + 3y = 12$. Verder is gegeven het punt $A(-1, 1)$.
Er is een positie van P waarvoor lijnstuk AP loodrecht staat op de lijn k.
Bereken voor deze positie exact de coördinaten van P.

f [▸ WERKBLAD] Gegeven is de lijn k door de oorsprong en de vector $\vec{a}$ met lengte 3. Zie de figuur hiernaast. De figuur staat ook op het werkblad. Er geldt $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ waarbij de lengte van $\vec{b}$ gelijk is aan 5 en $\vec{c}$ langs de lijn k valt.
Er zijn twee mogelijkheden voor $\vec{b}$.
Teken op het werkblad beide mogelijkheden voor $\vec{b}$.
Neem daarbij punt O als beginpunt van $\vec{b}$. Licht je aanpak toe.



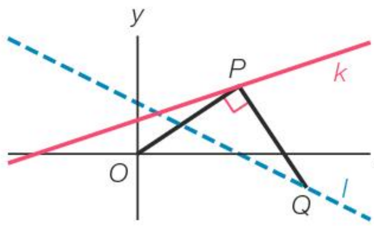
figuur 16.98

55 **a** Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = a\sqrt{x}$. De lijn $y = \frac{1}{2}x$ snijdt de grafiek van f_a in de oorsprong en in het punt S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.
De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om S over 90°. Zie de figuur hiernaast.
Druk de coördinaten van P uit in a.



figuur 16.99

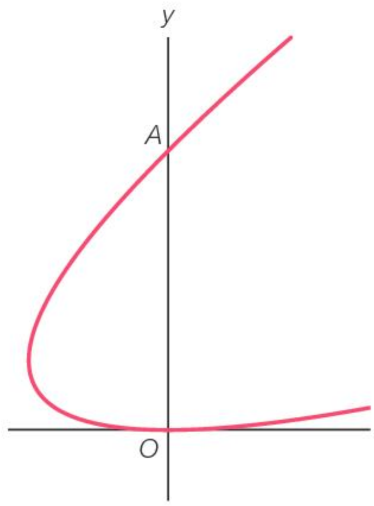
b Het punt P ligt op de lijn k: $x - 3y = -3$. Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong over 90° rechtsom gedraaid. Zo ontstaat de vector $\overrightarrow{OP'}$. Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$. Zie de figuur hiernaast.
Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn l bewegen. In de figuur is l gestippeld weergegeven.
Stel een vergelijking van lijn l op.



figuur 16.100

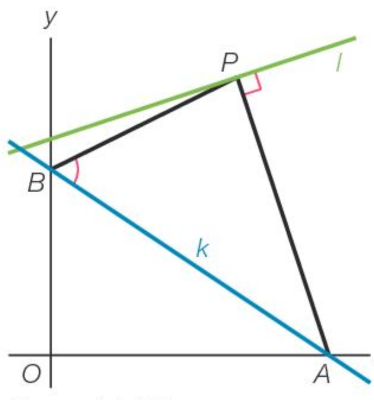
c De baan van het punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 \end{cases}$ met t de tijd.
Bereken exact de minimale snelheid van P.

d De beweging van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = (t-2)^2 \end{cases}$
In figuur 16.101 zie je de baan van P. De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong en in punt A.
Bereken exact de snelheid waarmee P door A gaat.



figuur 16.101

e De lijn k gaat door de punten $A(6, 0)$ en $B(0, 4)$.
De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$
De baan van P is de lijn l. Er is een positie van P waarbij AP loodrecht op l staat. Zie de figuur hiernaast.
Bereken voor deze positie van P de grootte van $\angle ABP$. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



figuur 16.102

Richtingsvector en normaalvector

Een lijn is te beschrijven met een vectorvoorstelling.

Van de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ is $\vec{s}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de steunvector en is $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ de richtingsvector. Dat betekent dat k door het punt (2, 3) gaat en dat de richtingscoëfficiënt gelijk is aan $\frac{4}{-1} = -4$.

Je kunt voor k ook schrijven $x = 2 - t \wedge y = 3 + 4t$. Hiermee is k geschreven met een parametervoorstelling.

Je kunt ook schrijven $\begin{cases} x(t) = 2 - t \\ y(t) = 3 + 4t \end{cases}$. Hiermee zijn de bewegingsvergelijkingen gegeven van een punt P dat beweegt over de lijn k. Er geldt $P(2 - t, 3 + 4t)$.

Door t te elimineren uit $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ krijg je een vergelijking van de lijn k.

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x = 8 - 4t \\ \underline{y = 3 + 4t} \; + \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Dus k: $4x + y = 11$ oftewel k: $y = -4x + 11$.

Een normaalvector van k is $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Het inproduct van $\vec{r}_k$ en $\vec{n}_k$ is gelijk aan nul.
Dat betekent dat de vectoren loodrecht op elkaar staan.

Je krijgt $\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = -4 + 4 = 0$.

De lijnen l: $ax + by = c$ en m: $bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar, want $\vec{n}_l \cdot \vec{n}_m = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot b + b \cdot -a = ab - ab = 0$.

Zijn van de lijnen k en l de richtingsvectoren bekend, dan gebruik je bij het berekenen van de hoek tussen deze lijnen de formule

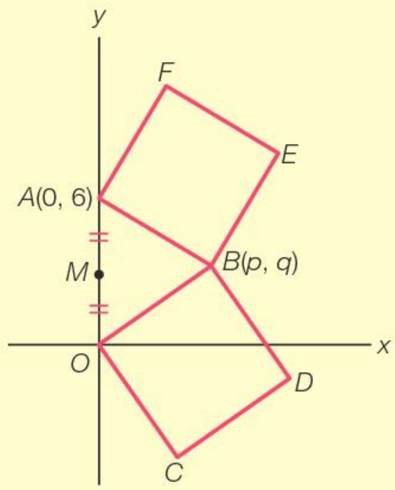
$$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))| = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

Rotaties over 90°

Draai je de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rechtsom over 90°, dan krijg je de vector $\vec{a}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

Bij linksom draaien van $\vec{a}$ over 90° krijg je de vector $\vec{a}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Zie de figuur hiernaast met driehoek OAB waarbij $A(0, 6)$ en $B(p, q)$. Het punt M is het midden van OA en $OCDB$ en $ABEF$ zijn vierkanten.
Je kunt als volgt bewijzen dat de lijn MB loodrecht staat op de lijn DE.



figuur 16.103

$\overrightarrow{MB} = \vec{b} - \vec{m} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q-3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO}_{\mathrm{L}}$

Omdat $\overrightarrow{BO} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{BO}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$, dus

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ q-p \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_{\mathrm{R}}$

Omdat $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 6-q \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{BA}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 6-q \\ p \end{pmatrix}$, dus

$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+p-q \\ p+q \end{pmatrix}$.

Dus $\overrightarrow{DE} = \vec{e} - \vec{d} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 6+p-q \\ p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+q \\ q-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2q \\ 2p \end{pmatrix}$.

Nu is $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} p \\ q-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-2q \\ 2p \end{pmatrix} = 6p - 2pq + 2pq - 6p = 0$.
Dus de lijn MB staat loodrecht op de lijn DE.

Bewegingsvergelijkingen

Voor de baan van een punt P die gegeven is door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ met t de tijd geldt

- de plaatsvector van P is $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- de snelheidsvector van P is $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
- de versnellingsvector van P is $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De baansnelheid is de lengte van de snelheidsvector, dus de baansnelheid is $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.
De baanversnelling is $a(t) = v'(t)$.

Zwaartepunten en vectoren

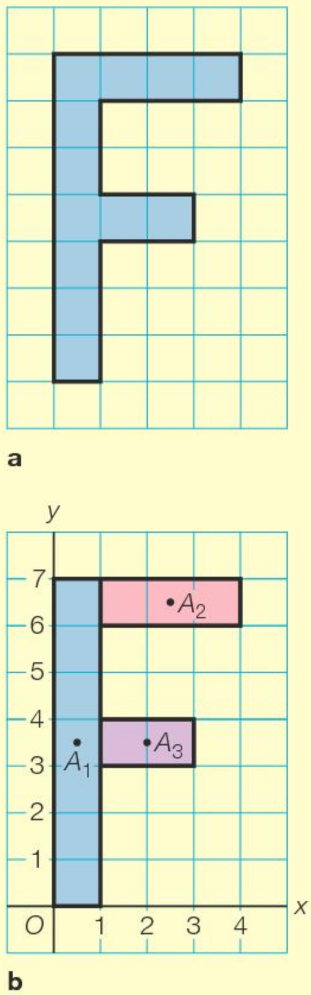
Voor het zwaartepunt Z van de massa's $m_1, m_2, ..., m_n$ in de punten $A_1, A_2, ..., A_n$ geldt
$\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_n\vec{a}_n)$ met
$M = m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Om het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 16.104a te vinden, deel je de figuur op in een aantal rechthoeken en breng je een assenstelsel aan. Zie figuur 16.104b.

$A_1(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en $m_1 = 7$
$A_2(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$ en $m_2 = 3$
$A_3(2, 3\frac{1}{2})$ en $m_3 = 2$
$M = 7 + 3 + 2 = 12$

$$\vec{z} = \tfrac{1}{12}\left(7 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 6\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{12}\left(\begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 24\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 19\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} \\ 4\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

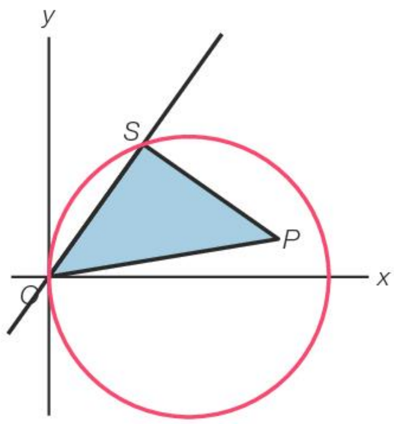
Dus $Z(1\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4})$.



figuur 16.104

56 **2016-1**

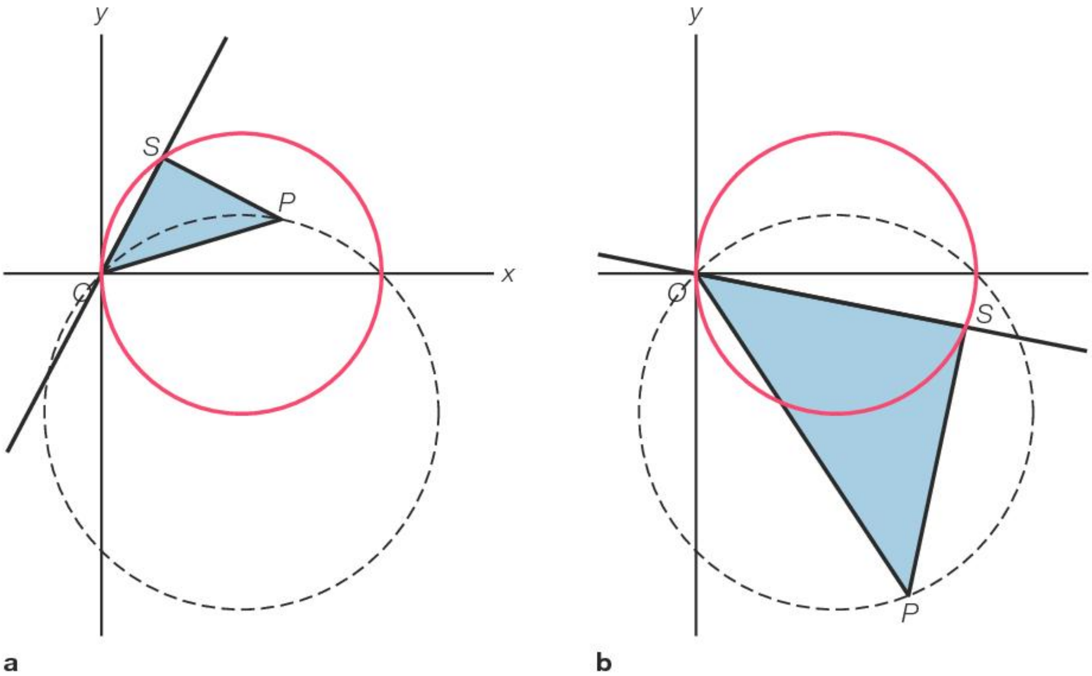
Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y = ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.
De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om S over 90°. Zie figuur 16.105, waarin ook driehoek OPS is weergegeven.
Voor de coördinaten van P geldt
$x_P = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_P = \dfrac{2a-2}{a^2+1}$.



figuur 16.105

a Bewijs dat deze formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P. In figuur 16.106a en figuur 16.106b is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O. Deze cirkel is gestippeld getekend.



figuur 16.106

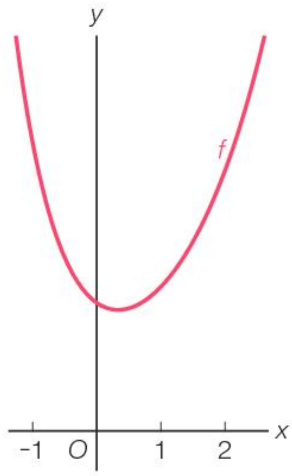
b Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

Er is een waarde van a waarvoor x_P maximaal is.

c Bereken exact deze waarde van a.

57 **2017-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$.
Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 2\frac{1}{4})$ en $Q(2, 4\frac{1}{16})$.
Ook ligt op de grafiek van f het punt P. Gegeven is dat de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AQ}$ loodrecht op elkaar staan.
Bereken de x-coördinaat van P in twee decimalen.



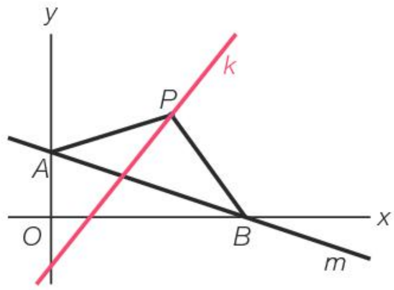
figuur 16.107

58 **2016-II**

Lijn k is de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Punt P beweegt over lijn k.
Lijn m gaat door de punten $A(0, 2)$ en $B(6, 0)$. Zie figuur 16.108.

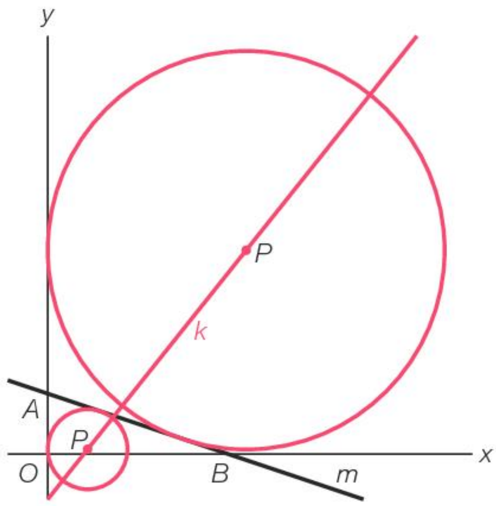
a Bereken exact de coördinaten van P in de situatie dat $AP = BP$.



figuur 16.108

Er zijn twee posities van P waarvoor een cirkel met middelpunt P bestaat die zowel raakt aan de y-as als aan lijn m. In figuur 16.109 zijn deze twee cirkels getekend.

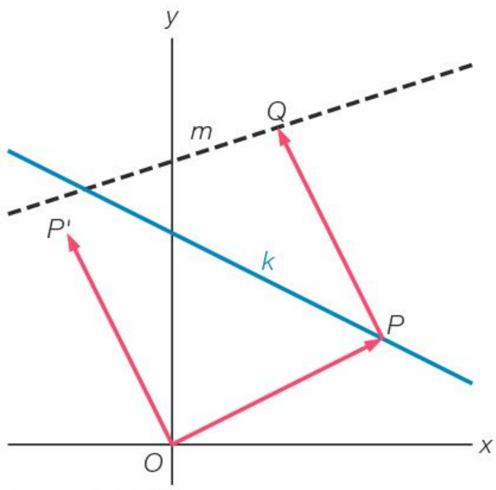
b Bereken van beide cirkels de straal. Rond je antwoord af op twee decimalen.



figuur 16.109

59 **2017-I**

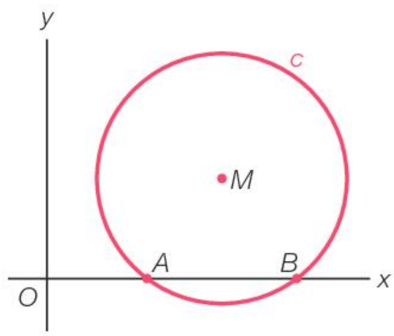
Gegeven is lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
Op deze lijn ligt het punt P.
Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong over 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$.
Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$. Zie de figuur.
Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.
Stel een vergelijking van lijn m op.



figuur 16.110

60 **2018-I**

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(14, 8)$ en straal 10. Deze cirkel snijdt de x-as in de punten A en B met $x_A < x_B$. Zie figuur 16.111.
In A bevindt zich een puntmassa met massa 3, in B een puntmassa met massa 1 en in M een puntmassa met massa 2.
Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze drie puntmassa's.



figuur 16.111

61 **2017-II**

Voor $a > 0$ is de baan van het punt P gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = at^2 + t + 1 \\ y(t) = at^2 - t + 1 \end{cases}$ waarbij t de tijd voorstelt.

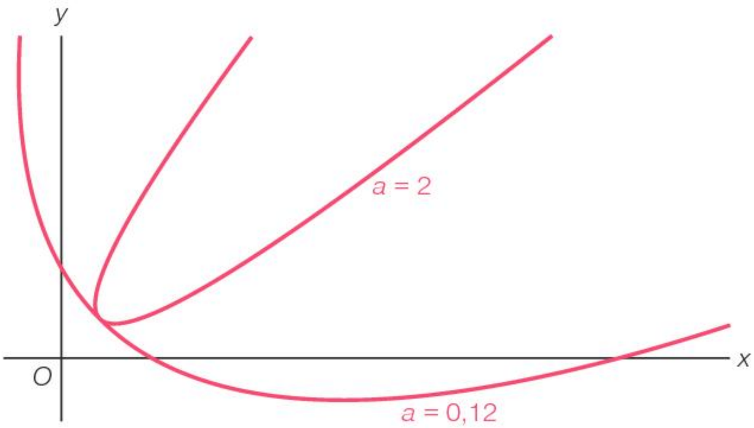
Neem $a = 3$. Dan zijn de bewegingsvergelijkingen van P dus

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + t + 1 \\ y(t) = 3t^2 - t + 1 \end{cases}$$

Voor $a = 3$ is de snelheid van P op zeker moment minimaal.

a Bereken exact deze minimale snelheid.

De baan van P is voor elke waarde van $a > 0$ een scheve parabool.
In de figuur is voor twee waarden van a de baan van P weergegeven.
Voor $a = 0{,}12$ bevindt P zich op twee tijdstippen op de x-as.
Voor $a = 2$ is er geen enkel tijdstip waarop P zich op de x-as bevindt.
Zie de figuur.



figuur 16.112

Er is één waarde van a waarvoor P zich op precies één tijdstip op de x-as bevindt.

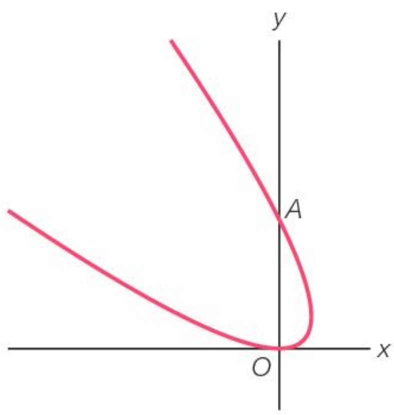
b Bereken exact deze waarde van a.

62 **2018-I**

De beweging van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$

In de figuur is de baan van P weergegeven.
De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong O en in punt A. Zie de figuur.

a Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.



figuur 16.113

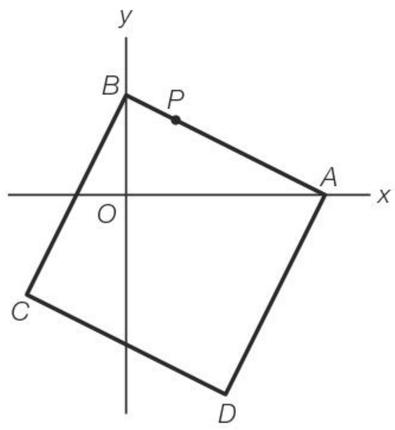
Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking $(x + y)^2 = 4y$.

b Bewijs dit.

63 **2018-II**

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-4, -4)$ en $D(4, -8)$.
Op zijde AB ligt het punt $P(2, 3)$.
Zie figuur 16.114.
De punten B, C en P liggen op één cirkel.

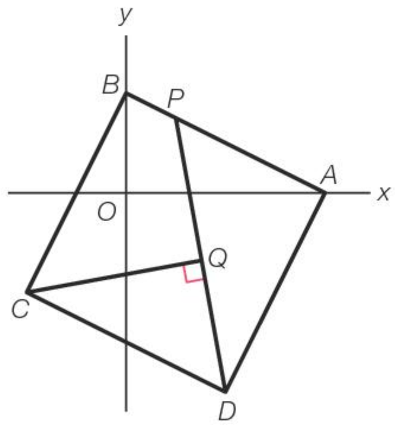
a Stel een vergelijking op van deze cirkel.



figuur 16.114

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q.
Er is een positie van Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP. Zie figuur 16.115.

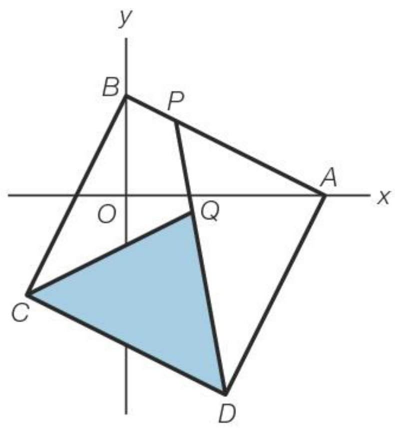
b Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.



figuur 16.115

In figuur 16.116 is driehoek CDQ blauw gemaakt.
Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

c Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.



figuur 16.116

64 **2019-I**

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

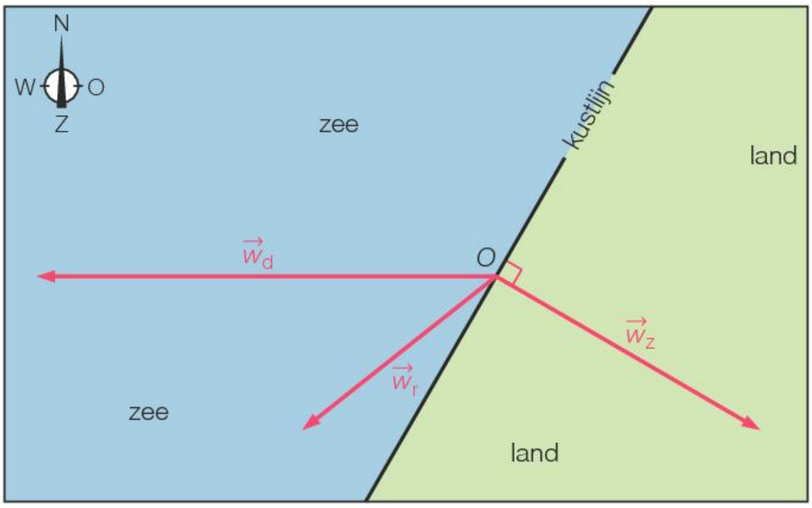
Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.
Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

65 **2019-II**

[▸ WERKBLAD] Wind heeft een richting en een snelheid. Daarom kan wind als een vector worden weergegeven. In de figuren bij deze opgave wordt een wind met een snelheid van 1 m/s weergegeven als een vector van 1 cm.
Op een warme zomerdag worden aan de kust de windrichting en de windsnelheid door twee processen bepaald:

– de luchtstroming van een gebied met hoge luchtdruk naar een gebied met lage luchtdruk: dit is wind $\vec{w}_d$.
– de luchtstroming die ontstaat doordat de temperatuur boven zee anders is dan boven land: dit is wind $\vec{w}_z$. We gaan er in deze opgave van uit dat deze wind loodrecht op de kustlijn staat en richting het land waait.

In figuur 16.117 is een voorbeeldsituatie getekend waarbij wind $\vec{w}_d$ in westelijke richting waait.



figuur 16.117

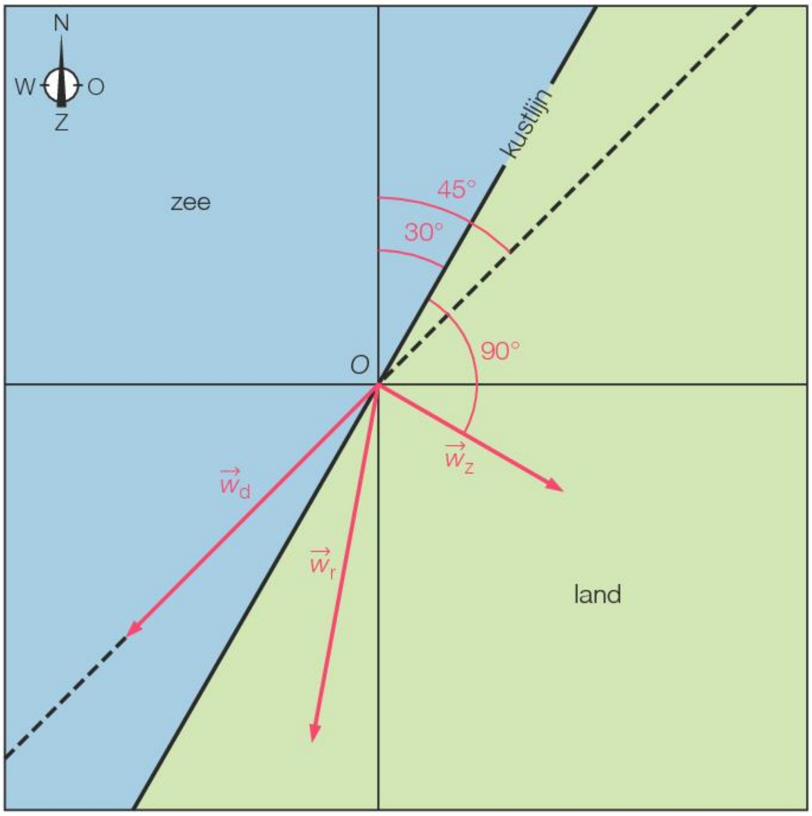
De resulterende wind $\vec{w}_r$ is de wind zoals die wordt ervaren door iemand die zich aan de kust in punt O bevindt. Er geldt $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$.
Op het werkblad is een deel van een kust getekend. Er geldt:

– De wind $\vec{w}_z$ waait met een snelheid van 4 m/s landinwaarts.
– De wind $\vec{w}_d$ waait met een snelheid van 6 m/s.
– De resulterende wind $\vec{w}_r$ waait evenwijdig met de kustlijn.

Op basis van bovenstaande drie gegevens zijn er twee mogelijkheden voor $\vec{w}_d$.

a Teken op het werkblad deze twee vectoren $\vec{w}_d$. Neem daarbij punt O als beginpunt van $\vec{w}_d$. Licht je aanpak toe.

Op een plek langs de Nederlandse kust (in figuur 16.118 het punt O) maakt de kustlijn een hoek van 30° met het noorden. Op een zekere dag waait de wind $\vec{w}_d$ met een snelheid van 5 m/s in zuidwestelijke richting. De wind $\vec{w}_z$ heeft een snelheid van 3 m/s en staat loodrecht op de kustlijn.
In figuur 16.118 zijn de lijn noord-zuid en de lijn oost-west de assen van het assenstelsel. De lijn door O waar vector $\vec{w}_d$ op ligt, is gestippeld getekend; die maakt dus een hoek van 45° met het noorden.
Figuur 16.118 staat ook op het werkblad.



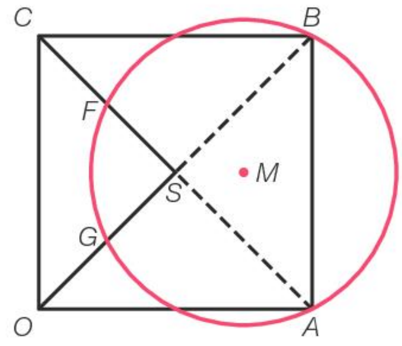
figuur 16.118

b Bereken algebraïsch de snelheid in m/s van de resulterende wind. Geef je eindantwoord in één decimaal. Je kunt bij deze vraag het werkblad gebruiken.

66 **2018-II**

Gegeven is het vierkant $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ en $C(0, 4)$.
Het snijpunt van OB en AC is het punt S.
Het punt $M(3, 2)$ is het middelpunt van een cirkel door A en B.
De punten F en G zijn de snijpunten van deze cirkel met CS respectievelijk OS. Zie figuur 16.119.
Er geldt dat F het midden is van CS.

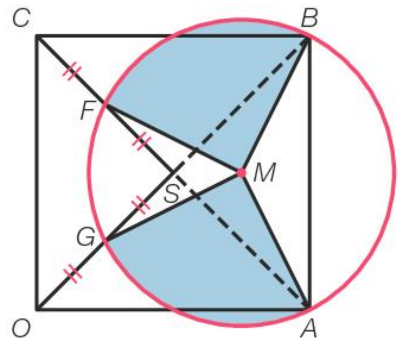
a Bewijs dat F inderdaad het midden is van CS.



figuur 16.119

Verder geldt: G is het midden van OS.
In figuur 16.120 zijn de cirkelsectoren BMF en GMA blauw gekleurd.
De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

b Bewijs dit.



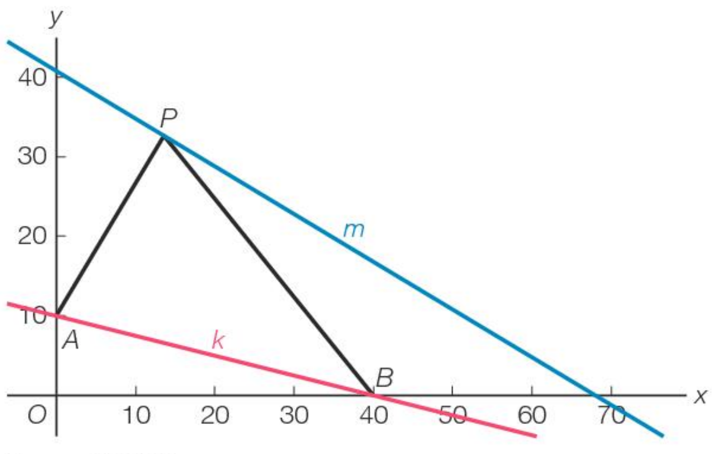
figuur 16.120

67 **2019-I**

Lijn k gaat door de punten $A(0, 10)$ en $B(40, 0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.



figuur 16.121

Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

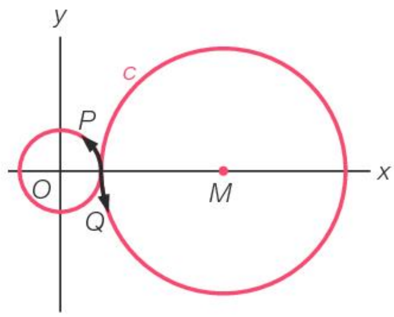
a Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

b Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

16.7 Goniometrie

68 **a** Los de vergelijking $\cos^2(x) + 1\frac{1}{4} = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$ exact op in $[0, 2\pi]$.

b Het punt P doorloopt de eenheidscirkel met constante snelheid. Op $t = 0$ is P in het punt $(1, 0)$ en een omloop duurt 10 seconden. Het punt Q doorloopt met dezelfde constante snelheid cirkel c waarvan het middelpunt M op de x-as ligt. Op $t = 0$ is Q in het punt $(1, 0)$ en een omloop duurt 30 seconden. De punten P en Q bewegen tegen de wijzers van de klok in. Zie de figuur hiernaast. De x-coördinaat van Q wordt gegeven door een formule van de vorm $x_Q = a + b\sin(c(t - d))$.
Bereken exact mogelijke waarden van a, b, c en d.



figuur 16.122

c De formule $N = \dfrac{\sin(t + \frac{1}{4}\pi) + \sin(t - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(t + \frac{1}{6}\pi) + \cos(t - \frac{1}{6}\pi)}$ is te herleiden tot de vorm $N = a\tan(t)$.
Bewijs dit en geef de exacte waarde van a.

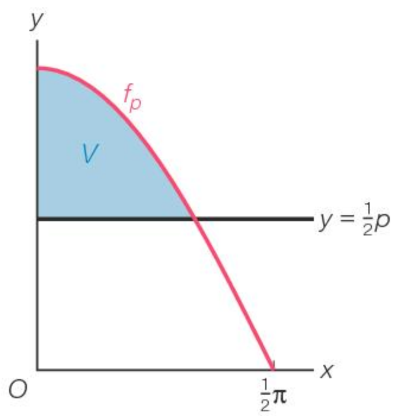
d Gegeven is de formule $s = 1\frac{1}{4} - \cos(\frac{1}{2}t) - \frac{1}{4}\cos^2(t)$. Hierin is s de afgelegde afstand na t seconden.
Stel een formule voor de afgeleide van s op en bereken de maximale snelheid. Rond je antwoord af op drie decimalen.

e Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \sin(x) - \cos^2(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Bereken exact de coördinaten van de vier toppen van de grafiek van f.

f Onderzoek of de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x) \cdot (\cos(2x) + 1)}$ een perforatie heeft.

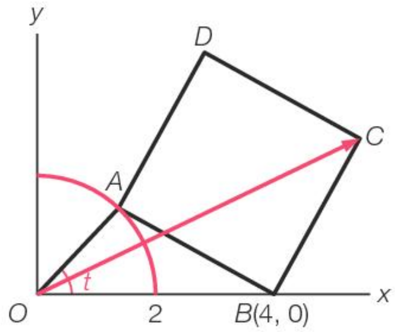
g Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\cos^2(x) - 1}{\sin(2x)}$. De grafiek van f heeft tussen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$ een perforatie in het punt A. De grafiek van de functie g valt voor alle waarden van x tussen $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ met uitzondering van $x = x_A$ samen met de grafiek van f. De lijn k snijdt de grafiek van g loodrecht in A.
Stel op exacte wijze een vergelijking op van k.

h Voor elke $p > 0$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = p\cos(x)$ met domein $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_p, de lijn $y = \frac{1}{2}p$ en de y-as.
Bereken algebraïsch voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 2. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.



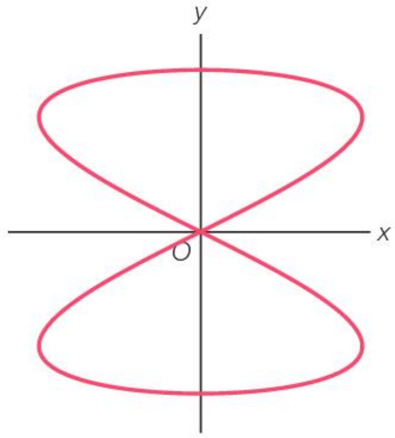
figuur 16.123

69 **a** Punt A ligt op de kwartcirkel die in de figuur hiernaast is getekend. Het middelpunt is de oorsprong en de straal is 2. De draaiingshoek van A is t radialen met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Het punt $B(4, 0)$ ligt op de x-as. Op het lijnstuk AB wordt het vierkant $ABCD$ getekend zoals hiernaast.
Druk de kentallen van $\overrightarrow{OC}$ uit in t.



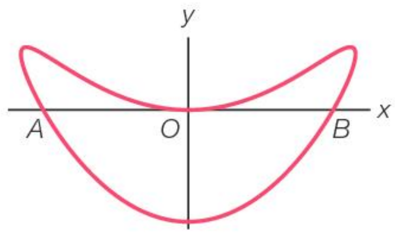
figuur 16.124

b De baan van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. In figuur 16.125 zie je de baan van P.
Voor $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$ bevindt P zich in de oorsprong. Daarnaast zijn er vier tijdstippen waarop de afstand van P tot de x-as even groot is als de afstand van P tot de y-as.
Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.



figuur 16.125

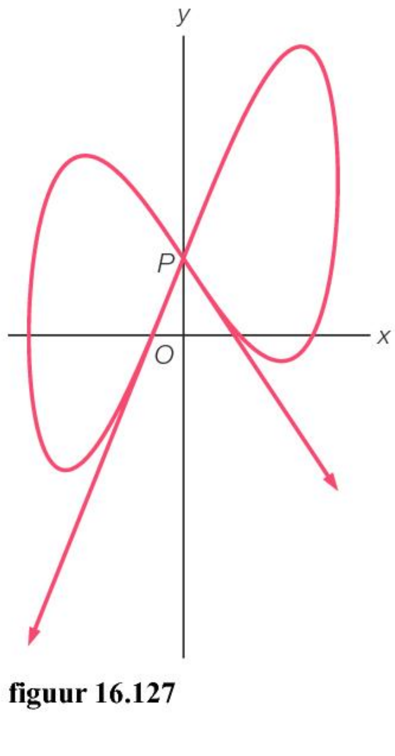
c De baan van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(2t) \end{cases}$ met t in seconden met $0 \leq t \leq 2\pi$ en x en y in meters. In figuur 16.126 zie je de baan van P. De baan van P snijdt de negatieve x-as in het punt A en de positieve x-as in het punt B.
Bereken exact hoeveel seconden de beweging van A naar B duurt.



figuur 16.126

d De baan van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(2t) \end{cases}$ met t in seconden met $0 \leq t \leq 2\pi$ en x en y in meters. In figuur 16.126 zie je de baan van P. De baan van P snijdt de negatieve x-as in het punt A.
Bereken exact de snelheid van P in A.

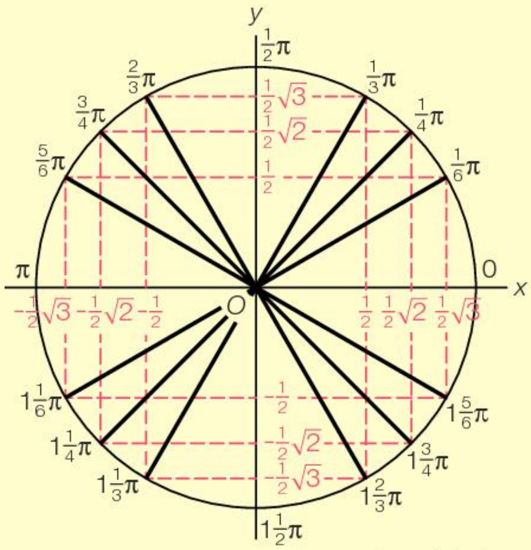
e De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(2t - \pi) \\ y(t) = \sin^2(t) + \sin(4t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq \pi$. Op de tijdstippen $t = \frac{1}{4}\pi$ en $t = \frac{3}{4}\pi$ bevindt P zich in het punt $(0, \frac{1}{2})$. In figuur 16.127 is dit punt aangegeven. Ook is de snelheidsvector van P op $t = \frac{1}{4}\pi$ en de snelheidsvector op $t = \frac{3}{4}\pi$ getekend.
Bereken algebraïsch in graden de hoek φ tussen deze snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.



figuur 16.127

Goniometrische vergelijkingen

- Basistypen
  - $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$
    Oplossen met de eenheidscirkel.
  - $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met
    $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$
    Oplossen met behulp van de exacte-waarden-cirkel.
- $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$
  Oplossen door te gebruiken
  $\sin(A) = \sin(B)$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
  $\cos(A) = \cos(B)$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.
- Oplossen door eerst te herleiden tot een van de basistypen met behulp van een of meer van de volgende formules.



figuur 16.128 De exacte-waarden-cirkel.

$\sin(-A) = -\sin(A)$
$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$
$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$
$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$

$\cos(-A) = \cos(A)$
$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$
$\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$
$\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Somformules en verschilformules
$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$

Verdubbelingsformules
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

Uit $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ volgt
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$.

Uit $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ volgt
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$.

De somformules, de verschilformules en de verdubbelingsformules staan op het voorblad van het Centraal Examen.

De vergelijking $\sin(2x)\cos(x+\frac{1}{3}\pi)+\cos(2x)\sin(x+\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}$ los je op door de somformule $\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$ van rechts naar links te gebruiken. Je krijgt

$\sin(3x+\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}$

$3x+\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x+\frac{1}{3}\pi=\pi-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

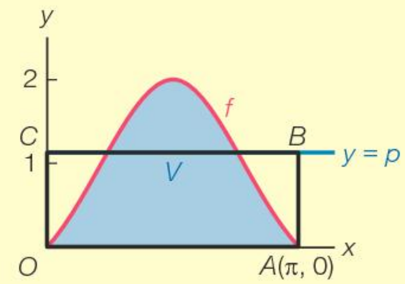
$3x=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \qquad \vee 3x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=-\frac{1}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \qquad \vee x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Afgeleiden en primitieven

$f(x)=\sin(x)$ geeft $f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$ geeft $f'(x)=-\sin(x)$
$f(x)=\tan(x)$ geeft $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x)=1+\tan^2(x)$
$f(x)=\sin(x)$ geeft $F(x)=-\cos(x)+c$
$f(x)=\cos(x)$ geeft $F(x)=\sin(x)+c$

In figuur 16.129 is de grafiek van de functie $f(x)=\sin^2(x)+\sin(x)$ met domein $[0,\pi]$ getekend. Ook is rechthoek $OABC$ getekend met $A(\pi, 0)$ en $C(0, p)$. De oppervlakte van $OABC$ is gelijk aan de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Om de exacte waarde van p te berekenen ga je als volgt te werk.



figuur 16.129

$$O(V)=\int_0^{\pi}(\sin^2(x)+\sin(x))\,dx \qquad \sin^2(x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

$$=\int_0^{\pi}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)+\sin(x))\,dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin(2x)-\cos(x)\right]_0^{\pi}$$

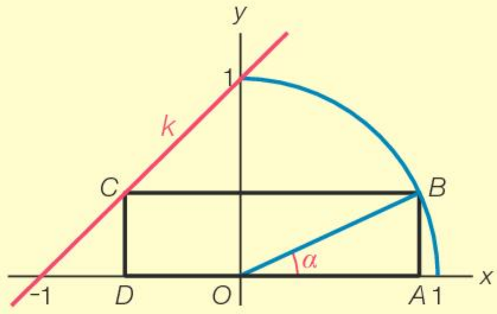
$$=\tfrac{1}{2}\pi-0+1-(0-0-1)=\tfrac{1}{2}\pi+2$$

De oppervlakte van rechthoek $OABC$ is πp, dus er geldt $\pi p=\frac{1}{2}\pi+2$ en dit geeft $p=\frac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}$.

Formules opstellen en gebruiken

Op het examen wordt soms gevraagd om een formule aan te tonen van een oppervlakte die afhankelijk is van een variabele hoek α.
Vervolgens kunnen hiermee berekeningen worden gemaakt, bijvoorbeeld het berekenen voor welke α de oppervlakte maximaal is.

We lichten dit toe met de volgende situatie.
In figuur 16.130 is een kwart eenheidscirkel getekend en de lijn k: $y = x + 1$.
Van rechthoek $ABCD$ liggen de punten A en D op de x-as, het punt B ligt op de eenheidscirkel en het punt C ligt op k.
We bekijken de oppervlakte V van de rechthoek.
Deze oppervlakte is afhankelijk van de hoek α, dat is de hoek die OB maakt met de x-as waarbij $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.



figuur 16.130

Voor de oppervlakte V geldt $V = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)$.
Om aan te tonen dat deze formule juist is ga je als volgt te werk.
Er geldt $OA = \cos(\alpha)$ en $AB = \sin(\alpha)$.
Omdat $AB = \sin(\alpha)$ is ook $CD = \sin(\alpha)$.
Omdat C op de lijn $y = x + 1$ ligt is $x_C = y_C - 1 = \sin(\alpha) - 1$.
Dus $AD = OA + OD = OA - x_C = \cos(\alpha) - (\sin(\alpha) - 1) = \cos(\alpha) - \sin(\alpha) + 1$.
Zo krijg je

$$\begin{aligned} V = AD \cdot AB &= (\cos(\alpha) - \sin(\alpha) + 1) \cdot \sin(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Om algebraïsch te onderzoeken of V maximaal is voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ bereken je
$\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]_{\alpha = \frac{1}{4}\pi}$

Je krijgt $\frac{dV}{d\alpha} = \cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha) = \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \cos(\alpha)$.

Dit geeft $\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]_{\alpha = \frac{1}{4}\pi} = \cos(\frac{1}{2}\pi) - \sin(\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = 0 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$.

Dus V is niet maximaal voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.

Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

Een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r is te noteren met de parametervoorstelling $\begin{cases} x = a + r\cos(t) \\ y = b + r\sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

Zo hoort bij de parametervoorstelling $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$

de cirkel met middelpunt (3, 1) en straal 2.

In de figuur hiernaast horen bij de baan van een punt P de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \end{cases}$ met t de tijd waarbij $0 \leq t \leq 2\pi$.

De baan snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}x$ in de punten A en B.

De bijbehorende t-waarden vind je door de vergelijking $\sin(t + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin(t)$ op te lossen.

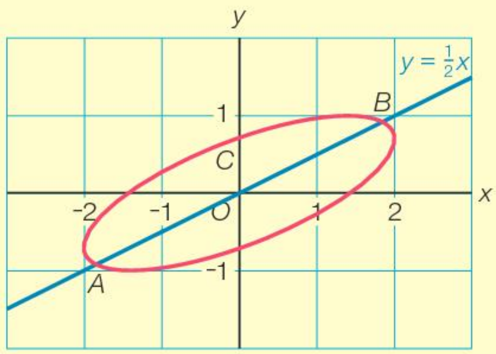
Dit geeft $\sin(t + \frac{1}{4}\pi) = \sin(t)$, dus

$t + \frac{1}{4}\pi = t + k \cdot 2\pi \vee t + \frac{1}{4}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi$

geen opl. $\qquad 2t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\qquad t = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi$

t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{3}{8}\pi \vee t = 1\frac{3}{8}\pi$



figuur 16.131

Op $t = 0$ is P in het punt $C(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

De helling van de baan in het punt C vind je als volgt.

$x(t) = 2\sin(t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(t)$, dus $x'(0) = 2$.

$y(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ geeft $y'(t) = \cos(t + \frac{1}{4}\pi)$, dus $y'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De helling is $\dfrac{y'(0)}{x'(0)} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

De baansnelheid van P in C bereken je met de formule

$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Dus $v(0) = \sqrt{2^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

70 **2016-I**

Gegeven is de formule $z = 1 - \cos(t) + \frac{1}{8}\sin^2(t)$. Hierin is z een afstand die afhangt van de tijd t met $0 < t < \pi$.

Stel een formule voor de afgeleide van z op en bereken hiermee de maximale snelheid waarmee z verandert. Rond je antwoord af op twee decimalen.

71 **2016-I**

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt P gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$

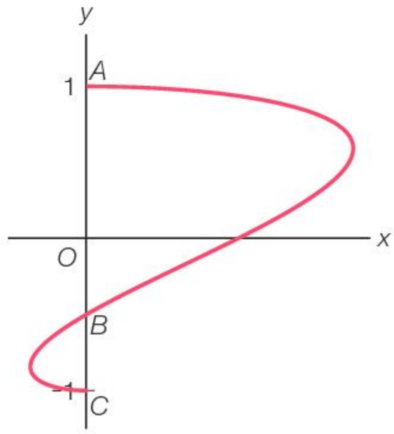
In de figuur is de baan van P weergegeven.

Op $t = 0$ bevindt P zich in het hoogste punt $A(0, 1)$ van de baan.

Op $t = \pi$ bevindt P zich in het laagste punt $C(0, -1)$ van de baan.

Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de y-as één keer in het punt B.

Bereken exact de snelheid van P in punt B.



figuur 16.132

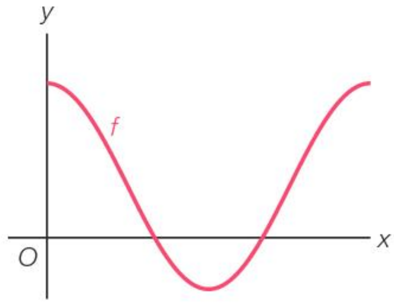
72 **2016-II**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$.

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van f waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van f is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van f weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van f.



figuur 16.133

73 **2018-I**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.

De grafiek van f heeft oneindig veel toppen.

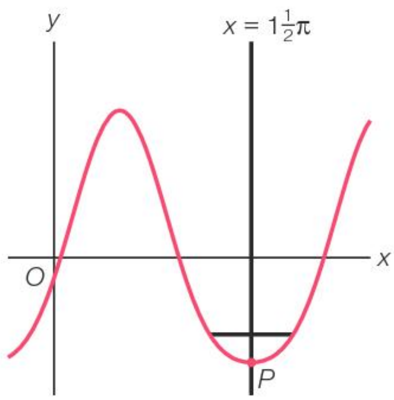
a Bereken exact de x-coördinaten van alle toppen van de grafiek van f.

Een van de toppen is het punt $P(1\frac{1}{2}\pi, -5)$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door P.

Boven P wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van f liggen. Zie de figuur.

b Bereken de afstand van P tot het horizontale lijnstuk. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.



figuur 16.134

74 **2016-II**

In de Waddenzee varieert de waterhoogte in de loop van de tijd. Eb en vloed wisselen elkaar voortdurend af in een getijdencyclus met een periode van ongeveer 745 minuten. De waterhoogte in het oostelijke deel van de Waddenzee kan worden benaderd met de formule

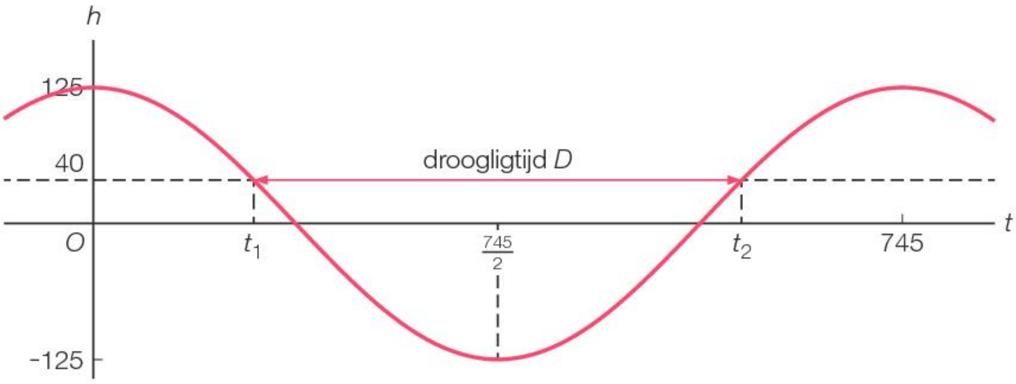
$$h = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right).$$

Hierbij is h de waterhoogte in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) en is t de tijd in minuten. Tijdstip $t = 0$ komt overeen met een moment waarop $h = 125$.

In het oostelijk deel van de Waddenzee liggen verschillende zandbanken die gedurende een deel van een getijdencyclus droog komen te liggen. De *droogligtijd D* is het aantal minuten per getijdencyclus dat een zandbank niet geheel onder water ligt. De droogligtijd hangt af van de hoogte van de zandbank: de hoogte van het hoogste punt van de zandbank ten opzichte van NAP.

In het oostelijk deel van de Waddenzee bevindt zich een zandbank met een hoogte van 40 cm boven NAP.

In figuur 16.135 is de grafiek van de waterhoogte h getekend. Tevens is de hoogte van deze zandbank weergegeven. Gedurende één periode zijn er twee tijdstippen waarop de waterhoogte h gelijk is aan de hoogte van de zandbank. We noemen deze tijdstippen t_1 en t_2. Het verschil tussen t_2 en t_1 is de droogligtijd D.



figuur 16.135

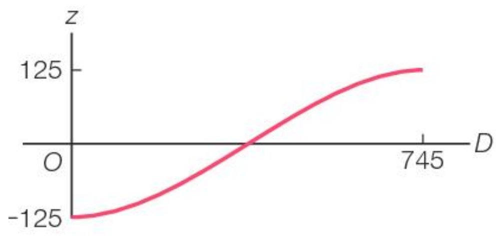
a Bereken de droogligtijd D van deze zandbank. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Op drooggevallen zandbanken kunnen waddenvogels voedsel vinden. Daarom willen natuuronderzoekers het verband weten tussen de hoogte van de zandbanken en de tijd dat ze droog liggen.

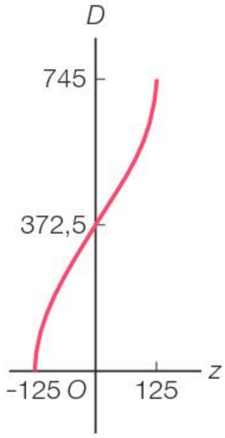
Met z duiden we de hoogte in cm van de zandbank aan, ten opzichte van NAP. Er geldt dan $z = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$.

b Bewijs dit.

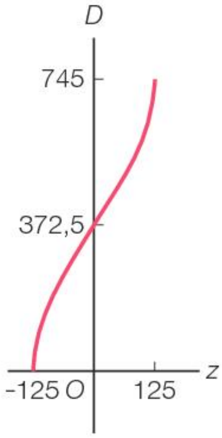
In figuur 16.136 is de grafiek van z getekend voor waarden van D tussen 0 en 745.
Ook kan een grafiek van het verband tussen D en z worden getekend waarbij z op de horizontale as en D op de verticale as wordt gekozen. Zie figuur 16.137.



figuur 16.136



figuur 16.137

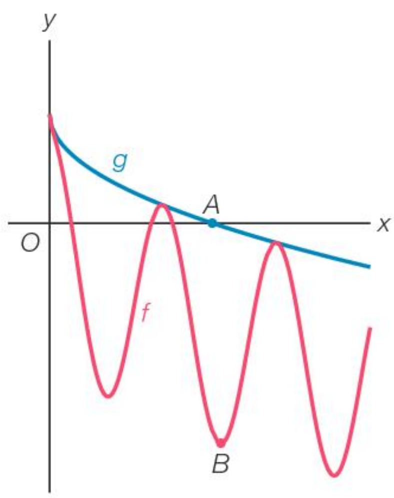


figuur 16.138

In onderzoeksrapporten wordt, in plaats van de formule die bij figuur 16.137 hoort, ook wel de derdegraads formule
$D = 8 \cdot 10^{-5}z^3 + 1{,}7z + 372{,}5$ gebruikt.
De bijbehorende grafiek staat in figuur 16.138.
De grafieken in figuren 16.137 en 16.138 lijken op elkaar. Zo verschillen de hellingen van beide grafieken in het punt (0; 372,5) niet veel.
De helling in een punt op de grafiek van figuur 16.137 kan worden berekend met behulp van de helling in het overeenkomstige punt in figuur 16.136. Er geldt dat het product van deze twee hellingen gelijk is aan 1.

c Bereken op algebraïsche wijze bij elk van de figuren 16.137 en 16.138 de helling van de grafiek in het punt (0; 372,5). Rond je antwoorden af op één decimaal.

75 **2019-I**
De functies f en g zijn gegeven door
$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{2x}$.
De grafiek van g snijdt de x-as in punt A.
De grafiek van f heeft diverse toppen, alle met een positieve x-coördinaat.
Punt B is de derde van deze toppen.
Zie de figuur.
Er geldt: punt B ligt rechts van punt A.
Toon dit aan met behulp van de afgeleide van f.



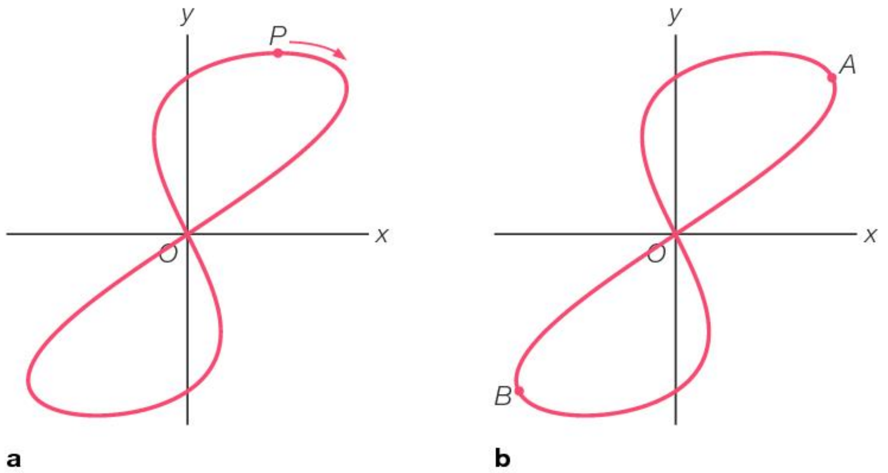
figuur 16.139

76 **2017-I**

De baan van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases}$ met t in seconden en x en y in meters.

Als t loopt van 0 tot 2π, doorloopt P de baan precies één keer.
In figuur 16.140a is deze baan weergegeven. Ook is te zien waar P zich bevindt op $t = 0$ en in welke richting P zich dan beweegt.



figuur 16.140

a Bereken met behulp van differentiëren de maximale snelheid van het punt P in meter per seconde. Rond je antwoord af op één decimaal.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er vier tijdstippen waarop de x-coördinaat en de y-coördinaat van P aan elkaar gelijk zijn. Op deze tijdstippen bevindt P zich achtereenvolgens in de punten A, O, B en O. Zie figuur 16.140b.

b Bereken exact hoeveel seconden de beweging van A naar B duurt.

Een punt Q maakt dezelfde beweging als P, maar Q loopt π seconden vóór op P.
De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dan

$\begin{cases} x(t) = \cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) \\ y(t) = 2\cos(t + \pi) \end{cases}$

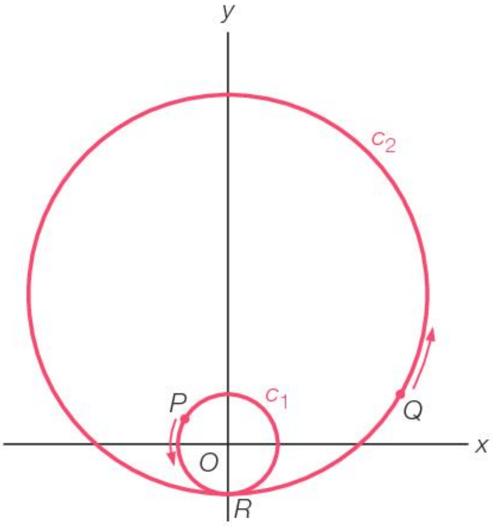
Als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = \frac{3}{2}\pi$, vallen P en Q samen. Op alle andere tijdstippen is er sprake van een lijnstuk PQ.

c Bewijs dat de helling van lijnstuk PQ onafhankelijk van t is.

77 **2017-II**

Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2. Cirkel c_1 heeft straal $\frac{1}{2}$ en middelpunt O. Het middelpunt van cirkel c_2 ligt op de positieve y-as.
Cirkel c_1 ligt binnen cirkel c_2. Deze twee cirkels raken elkaar in het punt $R(0, -\frac{1}{2})$.
Zie de figuur.
Er zijn twee bewegende punten, P en Q. Punt P draait rond over cirkel c_1, punt Q draait rond over cirkel c_2. In de figuur zijn de posities van P en Q op een bepaald tijdstip weergegeven. Verder is gegeven:

– Op $t = 0$ bevinden de punten P en Q zich in R.
– Beide punten bewegen tegen de wijzers van de klok in.
– Beide punten bewegen met constante snelheid.
– De snelheid van P is gelijk aan de snelheid van Q.
– Op $t = 12$ bevindt punt Q zich, sinds $t = 0$, voor het eerst weer in R.
– Op $t = 12$ heeft punt P precies vier maal c_1 doorlopen.



figuur 16.141

De y-coördinaat van punt Q wordt gegeven door een formule van de vorm $y_Q = k + l \cdot \sin(m(t - n))$.
Bereken waarden van k, l, m en n waarvoor deze formule in overeenstemming is met de gegevens.

78 **2018-II**

Een punt beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in O. Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.
P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip t.
Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi - a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van a verticaal.

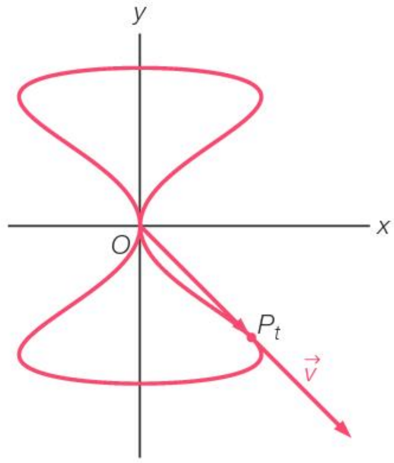
a Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de x-as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de y-as.

b Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit zo is.

Voor iedere waarde van t kunnen de snelheidsvector $\vec{v}$ vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.
In figuur 16.142 zijn punt P_t, vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector $\vec{v}$ getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

c Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$.



figuur 16.142

79 **2017-II**

We bekijken de goniometrische formule $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$. **(1)**

De juistheid van deze formule kan worden bewezen door gebruik te maken van $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$. **(2)**

a Bewijs dat formule 1 juist is.

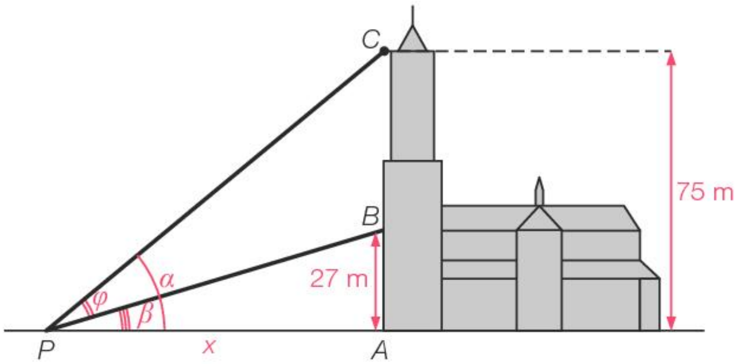
Een fotograaf wil de toren van de Eusebiuskerk in Arnhem zo duidelijk mogelijk op de foto krijgen. Hij vraagt zich af op welke afstand van de kerk hij dan moet gaan staan. Deze afstand berekenen we in deze opgave.

In figuur 16.143 is de situatie schematisch weergegeven. Punt A is een punt aan de voet van de toren. De punten B en C liggen beide recht boven punt A. Punt B ligt op een hoogte van 27 meter boven A. Punt C ligt op een hoogte van 75 meter boven A.

De fotograaf staat bij punt P op een afstand van x meter van A. Hij zet zijn camera in P op de grond zó dat alleen het deel van de toren tussen B en C op de foto staat. Er geldt $\angle PAB = 90°$. Verder is $\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle APB$ en $\varphi = \alpha - \beta$.

We noemen φ de *kijkhoek*.

Door gebruik te maken van formule 1 is het mogelijk $\tan(\varphi)$ uit te drukken in x.



figuur 16.143

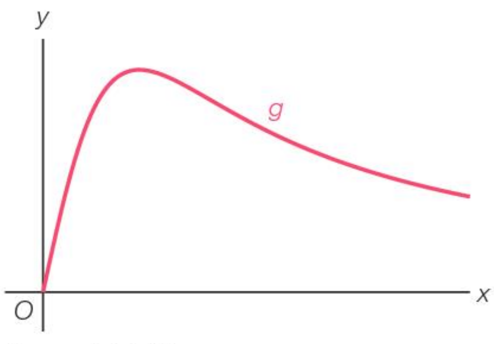
Er geldt $\tan(\varphi) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$. **(3)**

b Bewijs dat formule 3 juist is.

In figuur 16.144 de grafiek van de functie g met functievoorschrift $g(x) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$ geschetst.

Om het deel van de toren tussen B en C zo duidelijk mogelijk op de foto te krijgen, moet kijkhoek φ maximaal zijn. Dat is het geval als $\tan(\varphi)$ maximaal is. In figuur 16.144 is te zien dat er een waarde van x bestaat waarvoor $g(x)$ en dus $\tan(\varphi)$ maximaal is.

c Bereken exact op welke afstand de fotograaf moet staan zodat de kijkhoek maximaal is.



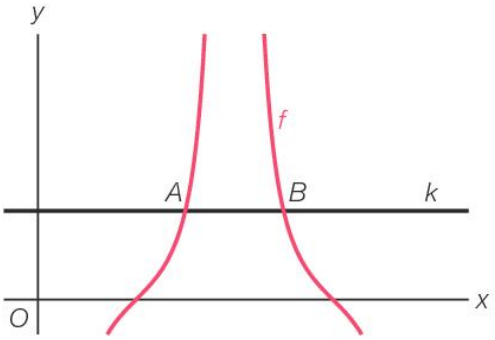
figuur 16.144

80 **2019-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$.

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x-coördinaten. Deze zijn in figuur 16.145 aangegeven.



figuur 16.145

a Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

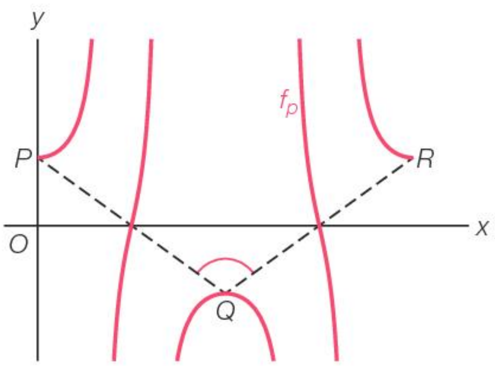
Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \dfrac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$.

b Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt $p \neq 0$.

De punten op de grafiek van f_p met x-coördinaten 0, π en 2π noemen we respectievelijk P, Q en R.

In figuur 16.146 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven. Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.



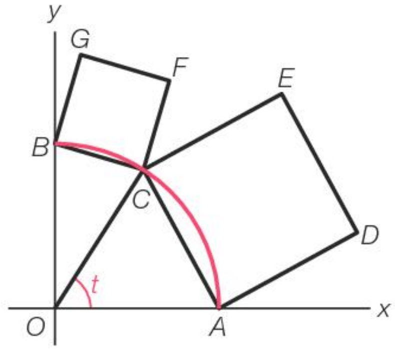
figuur 16.146

Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

c Bereken exact deze waarden van p.

81 **2018-I**

[▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Punt C bevindt zich op de kwartcirkel door A en B met middelpunt $O(0, 0)$. Op de lijnstukken AC en BC worden twee vierkanten $ADEC$ en $BCFG$ getekend. Zie figuur 16.147.
De grootte van hoek AOC (in radialen) noemen we t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Punt C heeft dus coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$.

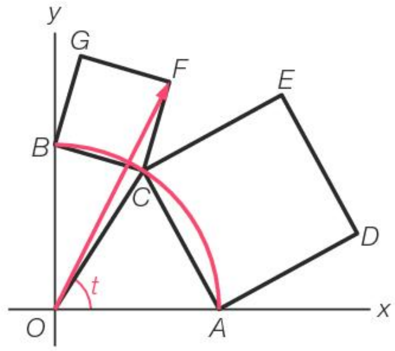


figuur 16.147

Er is een waarde van t waarvoor de oppervlakte van vierkant $ADEC$ twee keer zo groot is als de oppervlakte van vierkant $BCFG$.

a Bereken deze waarde van t. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

In figuur 16.148 is de situatie van figuur 16.147 uitgebreid met vector $\overrightarrow{OF}$.
Deze figuur staat vergroot op het werkblad.
Voor elke waarde van t met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
geldt $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$.



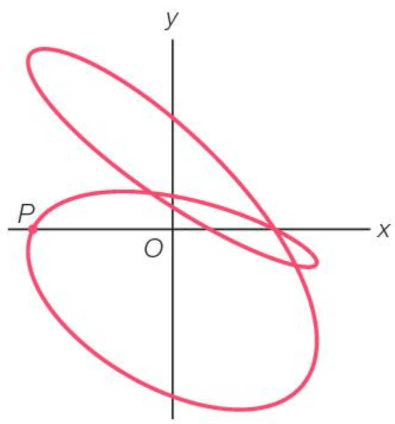
figuur 16.148

b Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

82 **2019-II**

De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases}$
met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Op verschillende tijdstippen bevindt P zich op de x-as. Op een van die tijdstippen bevindt P zich links van de y-as. Zie figuur 16.149, waarin de positie van P op dit tijdstip is aangegeven.

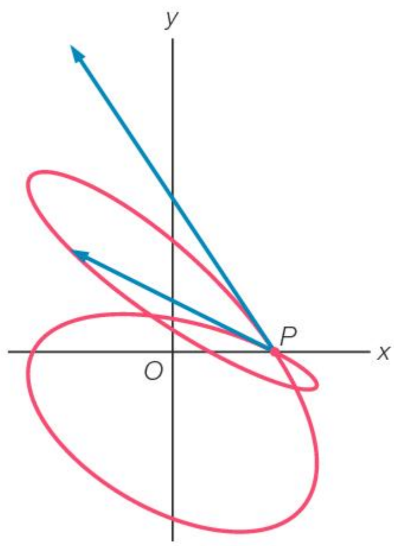
a Bereken exact de x-coördinaat van P op dit tijdstip.



figuur 16.149

Op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ bevindt P zich in hetzelfde punt. Dit punt is met een stip aangegeven in figuur 16.150.
Ook zijn de snelheidsvector van P op tijdstip $t = 0$ en de snelheidsvector van P op tijdstip $t = \pi$ aangegeven.

b Bereken algebraïsch de hoek φ in graden tussen deze twee snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

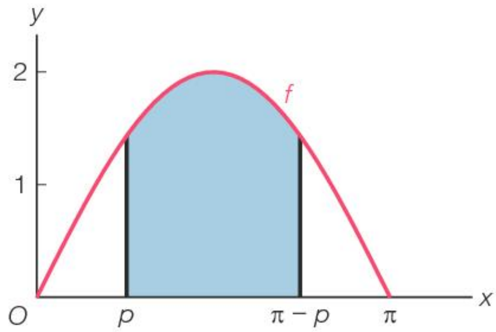


figuur 16.150

83 **2019-II**

De functie f met domein $[0, \pi]$ wordt gegeven door $f(x) = 2\sin(x)$.
We bekijken het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van f, de x-as, de lijn met vergelijking $x = p$ en de lijn met vergelijking $x = \pi - p$. Hierin is $0 < p < \frac{1}{2}\pi$.
In figuur 16.151 is dit gebied blauw. De oppervlakte van het gebied is $A(p)$.
Er geldt $A(p) = 4\cos(p)$.

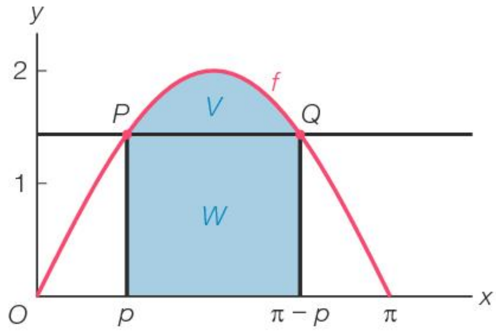
a Bewijs dat deze formule voor $A(p)$ juist is.



figuur 16.151

De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt P.
De lijn met vergelijking $x = \pi - p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De horizontale lijn door P en Q verdeelt het blauwe gebied in twee delen.
Het deel boven deze lijn is V, het deel onder deze lijn is W. Zie figuur 16.152.
Er is één waarde van p waarvoor de oppervlakten van V en W aan elkaar gelijk zijn.

b Bereken deze waarde van p. Geef je eindantwoord in twee decimalen.



figuur 16.152

Gemengde opgaven

13 Limieten en asymptoten

1 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 9}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2a - x^2}{(x + a)(x - a)}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{3 + \ln(x^4)}$

d $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{2x} - e^6}{e^3 - e^x}$

e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x+2}}{e^{2x} + 2}$

f $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{2 + \ln(x^3)}$

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ en $g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$.

De grafiek van f heeft een perforatie bij punt A en de grafiek van g heeft een perforatie bij punt B. De lijn k gaat door A en B.

a Stel van k een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$ met a, b en c gehele getallen.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt C. De lijn l raakt de grafiek van f in C.
Het punt D is het snijpunt van de horizontale asymptoot van de grafiek van f en de verticale asymptoot van de grafiek van g.
Onderzoek op algebraïsche wijze of D op l ligt.

3 Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \dfrac{4x^2 + 4x - 15}{2x + a}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f_3 de formule op.

b Bereken voor welke a de lijn $y = 2x$ scheve asymptoot is van de grafiek van f_a.

c Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

4 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{2\,e^{-x} - 4}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Los exact op $f(x) \geq -1$.

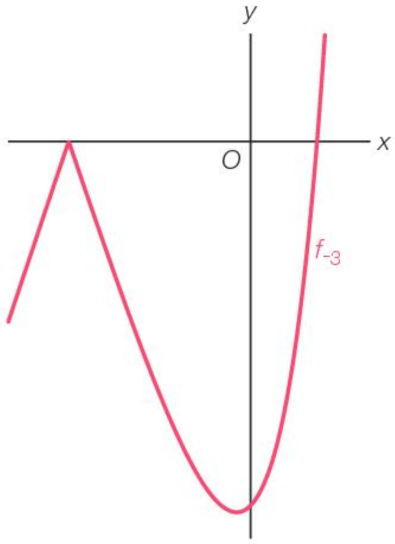
5 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} x^2 + 4px & \text{voor } x < 2 \\ 2x + q & \text{voor } 2 < x < 3 \\ x^3 - 4x + p & \text{voor } x > 3 \end{cases}$

a Bereken exact de waarden van p en q waarvoor $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaan.

b Bereken exact de waarden van p en q waarvoor het punt $A(3, 10)$ een perforatie van de grafiek van f is.

c Bereken exact de waarden van p en q waarvoor $f_{p,q}$ een extreme waarde voor $x = -1$ heeft en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat.

6 Voor elke $p < 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = |x - p|(e^x - 3)$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f_{-3}. Deze grafiek heeft een knik en een top met horizontale raaklijn.



figuur G.1

a Bereken exact voor welke p de top met horizontale raaklijn bij $x = -1$ ligt.

b Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p geen knik heeft.

Voor de waarden van p waarvoor de grafiek van f_p een knik heeft, raakt de lijn k het linkerdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt en raakt de lijn l het rechterdeel van de grafiek van f_p in het knikpunt.

c Neem $p = 2$ en bereken de hoek tussen k en l. Rond af op gehele graden.

d Bereken exact voor welke p de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

7 Voor elke a is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$.

a Bereken in twee decimalen voor welke a de asymptoten van de grafiek van f_a elkaar snijden op de lijn $y = x - 1$.

b Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a een raaklijn met richtingscoëfficiënt 4 heeft in het punt A met $x_A = 1$.

c Voor de inverse functie van f_a geldt $f_a^{\text{inv}}(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x-2}\right)}$.

Bewijs dat deze inverse juist is.

8 Voor elke $a \neq 3$ is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{ax+4}{2x-3}$.

Bereken exact voor welke a

a de grafiek van f_a een perforatie heeft

b de grafieken van f_a en f_a^{inv} elkaar snijden in het punt A met $x_A = 4$

c de horizontale en de verticale asymptoot van de grafiek van f_a elkaar snijden in een punt van de parabool $y = x^2$.

9 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2 - |x-1|}$.

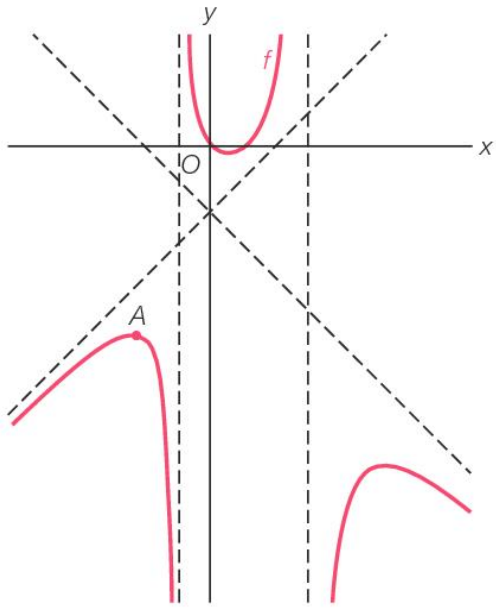
In figuur G.2 zie je de grafiek van f. Het punt A is een top van de grafiek.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken exact de y-coördinaat van A.

c Bereken in twee decimalen voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ twee oplossingen heeft.

d Los exact op $f(x) \leq 2$.



figuur G.2

10 Voor elke a is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$.

a Voor welke a ligt het punt $A(2, 3)$ op de scheve asymptoot van de grafiek van f_a?

b Voor welke a heeft de grafiek van f_a een top op de lijn $x = 1$?

c Onderzoek of er een waarde van a is waarvoor de grafiek van f_a een rechte lijn met een perforatie is.

11 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1}$.

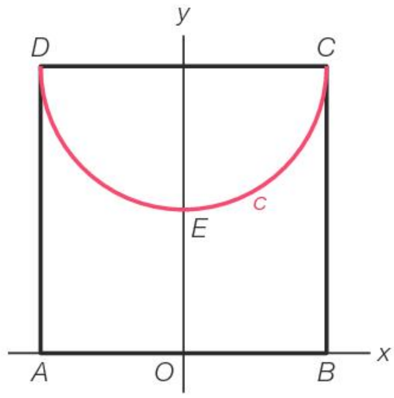
a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek van f.

c Los exact op $f(x) \geq \frac{3}{5}$.

d De raaklijn aan de grafiek van f in het punt A met $x_A = \text{e}$ snijdt de x-as in het punt B.
Bereken exact de coördinaten van B.

12 In de figuur hiernaast is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 6)$ en $D(-3, 6)$. De halve cirkel c heeft eindpunten C en D en gaat door het punt $E(0, 3)$.



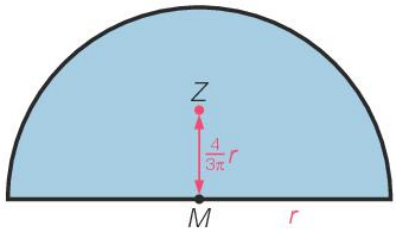
figuur G.3

a Het punt P doorloopt de halve cirkel. Het punt Q is het midden van het lijnstuk BP. De baan van Q is een kromme met vergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ met $d \leq y \leq e$.
Bewijs dit en geef de waarden van a, b, c, d en e.

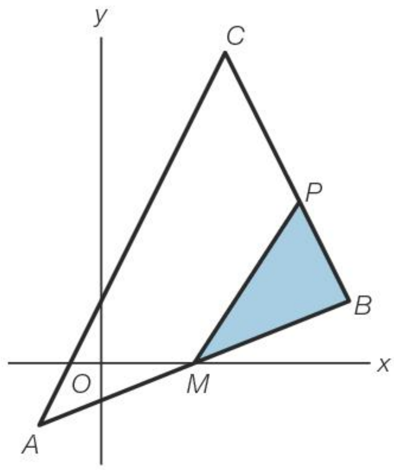
b In de punten O, A, B, C, D en E bevinden zich puntmassa's met achtereenvolgens een massa van 1, 1, 1, 2, 2 en 3. Het zwaartepunt Z_1 van deze puntmassa's ligt op de y-as.
Bereken de y-coördinaat van Z_1.

c De homogene massa die wordt gevormd door het vierkant waaruit de halve cirkel is weggelaten, heeft zwaartepunt Z_2 dat op de y-as ligt.
Bereken de y-coördinaat van Z_2. Rond af op twee decimalen. Gebruik hierbij de stelling hieronder.

> Het zwaartepunt van de halve cirkelschijf met straal r in de figuur hiernaast ligt $\frac{4}{3\pi}r$ boven het punt M.



13 Gegeven is driehoek ABC met $A(-1, -1)$, $B(4, 1)$ en $C(2, 5)$. Het punt M is het midden van de zijde AB en het punt P beweegt over de zijde BC.



figuur G.4

a Bewijs dat het zwaartepunt Z van driehoek ABC op de lijn $y = x$ ligt.

b De cirkel c met middellijn AB snijdt de zijde AC behalve in A ook in het punt D.
Bereken exact de coördinaten van D.

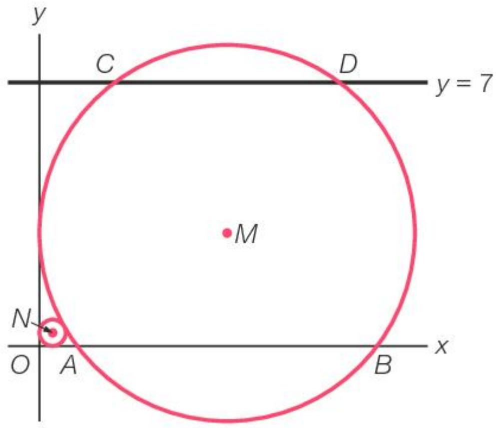
c Er is een positie van P waarbij de oppervlakte van driehoek BMP een vijfde deel is van de oppervlakte van driehoek ABC. Zie de figuur hiernaast.
Bereken voor deze positie exact de coördinaten van P.

14 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ met middelpunt M.

a De cirkel snijdt de x-as in de punten A en B en de lijn $y = 7$ in de punten C en D. Zie de figuur hiernaast.
In A, B, C, D en M bevinden zich puntmassa's met achtereenvolgens een massa van 1, 2, 3, 4 en 6.
Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze vijf puntmassa's.

b Er zijn twee lijnen door de oorsprong die c raken.
Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.

c De cirkel met middelpunt N in figuur G.5 raakt de x-as, de y-as en c.
Bereken exact de straal van deze cirkel.



figuur G.5

15 Gegeven is driehoek ABC met $A(2, 1)$, $B(6, 1)$ en $C(2, 4)$.
De bissectrice k van $\angle A$ snijdt de zijde BC in het punt S.

a Stel een vectorvoorstelling op van k en bereken hiermee de coördinaten van S.

b Toon aan dat $\frac{BS}{CS} = \frac{AB}{AC}$.

In vraag b heb je een voorbeeld gezien van de bissectricestelling:

De bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aangrenzende zijden van de driehoek.

Deze stelling geldt voor elke driehoek.

De coördinaten van het snijpunt T van de bissectrice van hoek B met de zijde AC is volgens de bissectricestelling te berekenen met

$\vec{t} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c Geef p en q en bereken de coördinaten van T.

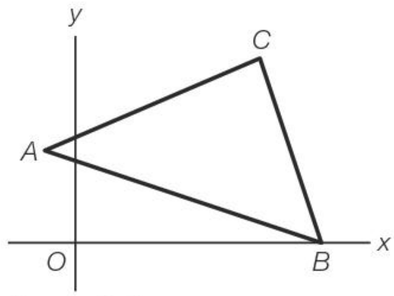
d Bereken de coördinaten van het snijpunt U van de bissectrice van hoek C met de zijde AB.

16 Gegeven is driehoek ABC met $A(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $B(4, 0)$ en $C(3, 3)$.

a Onderzoek op algebraïsche wijze of het zwaartepunt Z van de driehoek op de bissectrice b van $\angle ABC$ ligt.

b De bissectrice b van $\angle ABC$ snijdt de y-as in het punt D en de middelloodlijn m van de zijde BC snijdt de y-as in het punt E.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk DE.

c De cirkel c heeft middelpunt A en gaat door de oorsprong. Er zijn twee lijnen die c raken en door het punt $F(3, 1)$ gaan.
Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.



figuur G.6

17 Gegeven zijn de cirkels c: $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0$ en d: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ en het punt $P(0, 1)$.
De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van de cirkels. Zie de figuur hiernaast.

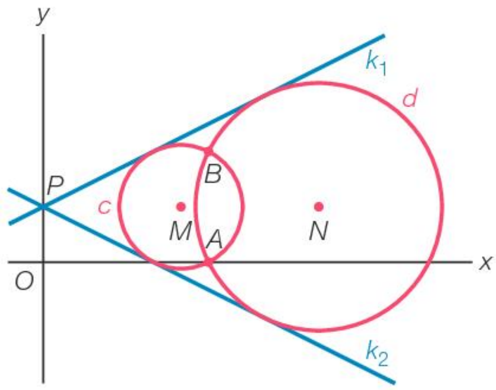
a Bereken exact de coördinaten van A en B.

De lijnen k_1 en k_2 gaan door P.

b Toon dit aan.

c Stel vergelijkingen op van k_1 en k_2.

d Er zijn twee cirkels die zowel k_1 en k_2 als c raken.
Bereken exact de straal van de grootste van deze twee cirkels. Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



figuur G.7

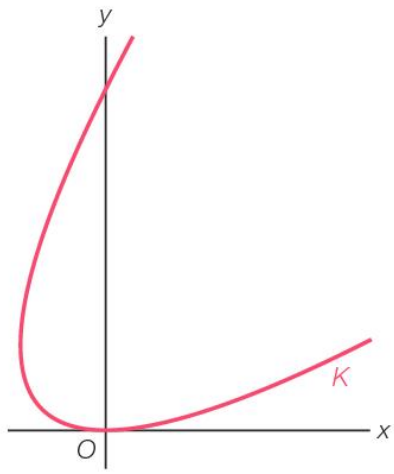
18 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ en de kromme K: $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = (t-2)^2 \end{cases}$
Er geldt $(t-2)^4 = t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16$.

a Toon dit aan.

b Bereken exact de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van c en K.

c De kromme K kan beschreven worden met een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 = axy + by$.
Bereken a en b. Gebruik hierbij de coördinaten van twee punten die op K liggen.

d Verder is gegeven het punt $A(4, -4)$.
Het punt P doorloopt de kromme K. Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP.
Bewijs dat Q op de kromme ligt met vergelijking $x^2 + y^2 = 2xy + 8x$.

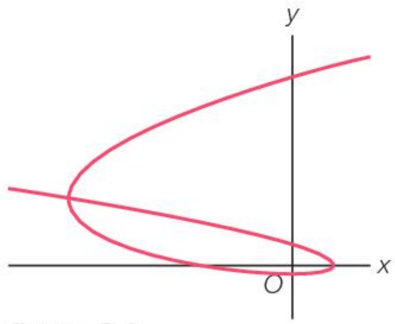


figuur G.8

19 Gegeven zijn de lijn k: $y = -3x + 6$ en het punt $M(-2, 2)$.
De cirkel c_1 heeft middelpunt M en raakt k.

a Stel een vergelijking op van c_1.
b Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 met middelpunt M die van k een lijnstuk afsnijdt met lengte 4.
c Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die loodrecht op k staan en c_1 raken.
d Stel vergelijkingen op van de lijnen n_1 en n_2 die door het punt $A(0, -2)$ gaan en c_1 raken.

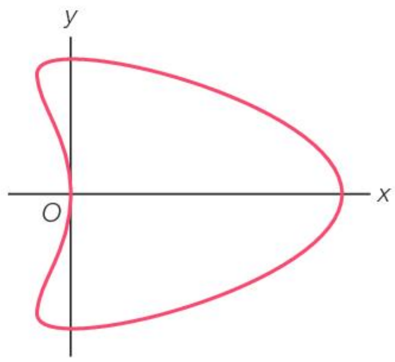
20 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$ met t in seconden en x en y in cm.
De baan van P is getekend in figuur G.9.



figuur G.9

a Bereken exact voor welke p de lijn $x = p$ de baan in drie punten snijdt.
b Bereken algebraïsch de baansnelheid en de baanversnelling van P op het moment dat P de negatieve x-as passeert. Rond af op twee decimalen.
c De lijn k raakt de baan van P in het punt $A(-22, 3)$ en de lijn l raakt de baan in het punt $B(-2, 3)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

21 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) - \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ met t in seconden en $-\pi \leq t \leq \pi$
en x en y in cm.
De baan van P is getekend in figuur G.10.



figuur G.10

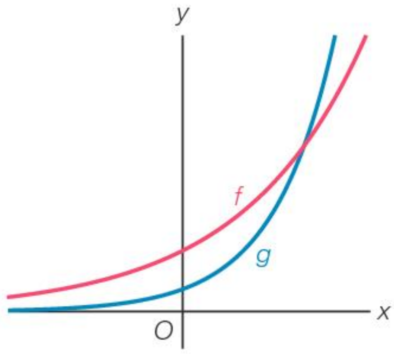
a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal of verticaal is.
b Bereken exact de baansnelheid waarmee P door de oorsprong gaat.
c Bereken exact de baanversnelling van P op het moment dat P de positieve y-as passeert.
d Bewijs dat de baan van P lijnsymmetrisch is in de x-as.
e Bereken exact de coördinaten van de snijpunten C en D van de baan met de lijn $x = \frac{3}{4}$.
f De parabool $y = x^2$ snijdt de baan in de punten O en E.
Bereken de coördinaten van E in twee decimalen.

22 Gegeven zijn de functies $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = \mathrm{e}^{x-1}$.

a De lijn $y = p$ met $0 < p < \mathrm{e}$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact voor welke p geldt dat $x_A = -x_B$.

b De lijn $y = q$ met $q > \mathrm{e}$ snijdt de y-as in het punt C, de grafiek van f in het punt D en de grafiek van g in het punt E waarbij $CE : DE = 3 : 1$.
Bereken exact de waarde van q.

c De lijn $x = r$ met $r < 0$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q.
Bereken voor welke r de lengte van het lijnstuk PQ kleiner is dan $\frac{1}{10}$. Rond af op drie decimalen.



figuur G.11

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de y-as en de grafieken van f en g.

d Bereken exact de oppervlakte van V.

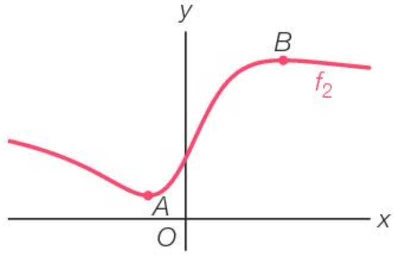
e Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

23 Voor elke p is gegeven de functie $f_p(x) = \dfrac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1}$.

Voor de afgeleide geldt $f_p'(x) = \dfrac{-px^2 + (2p - 2)x + p}{(x^2 + 1)^2}$.

a Toon aan dat deze afgeleide juist is.

De grafiek van f_p heeft voor elke $p \neq 0$ twee toppen, die we A en B noemen met $x_A < x_B$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie f_2 met de toppen A en B.



figuur G.12

b Bewijs dat voor de functie f_2 geldt dat $x_A + x_B = 1$.

c Bewijs dat voor de functie f_4 geldt dat $AB = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

d Bewijs dat voor de functie f_1 geldt dat $y_B = 3 \cdot y_A$.

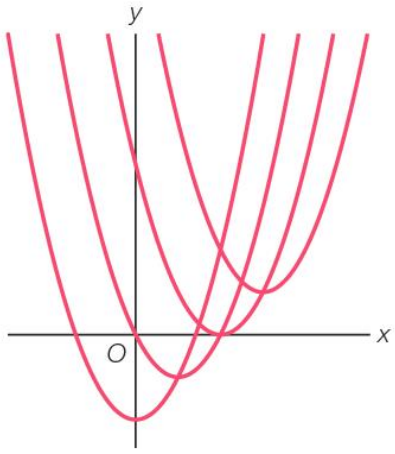
e Bewijs dat voor de functie f_{-3} geldt dat $OB = 3 \cdot OA$.

f Bereken exact voor welke p de horizontale asymptoot van de grafiek van f_p de grafiek snijdt in het punt P met $x_P = 2$.

g Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_0 en de lijn $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt.

24 Voor elke p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = (x - p)^2 + p - 2$. In figuur G.13 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p getekend.
Voor elke p geldt dat de top van de grafiek van f_{p+1} op de grafiek van f_p ligt.

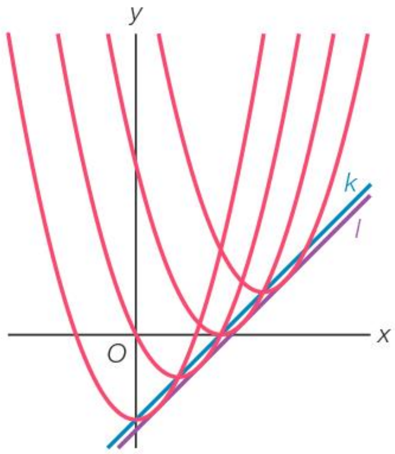
a Bewijs dit.



figuur G.13

De lijn k gaat door de toppen van de grafieken van f_p.
De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafieken van f_p.
Zie figuur G.14.

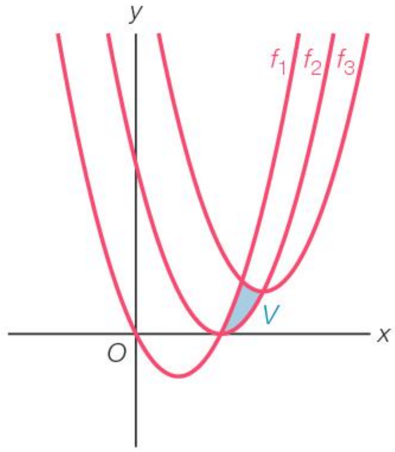
b Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van l.



figuur G.14

In figuur G.15 is V het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f_1, f_2 en f_3.

c Bereken exact de oppervlakte van V.

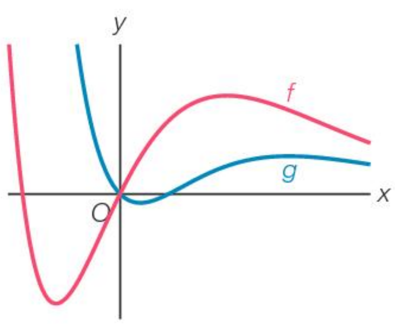


figuur G.15

25 Gegeven zijn de functies $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot 2^{-x}$ en $g(x) = (x^2 - x) \cdot 2^{-x}$.

a De lijn $x = p$ met $p > 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact voor welke p de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

b De lijn $y = q$ met $q > 0$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D met $0 < x_C < x_D$ waarbij de lengte van het lijnstuk CD gelijk is aan 3.
Bereken exact de waarde van q.



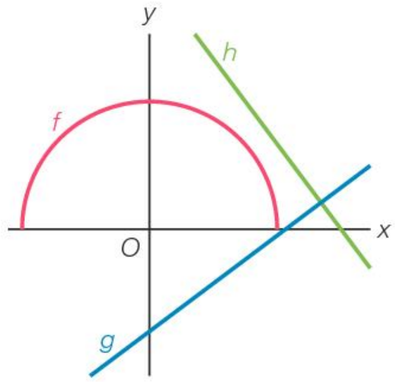
figuur G.16

26 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 4$ en $h(x) = -\frac{4}{3}x + 10$.

De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A, de grafiek van g in het punt B en de grafiek van h in het punt C.

a Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk AB.

b Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk AC.

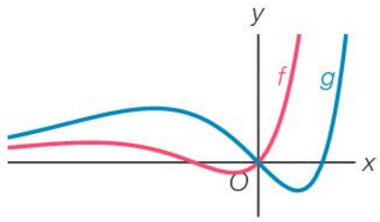


figuur G.17

27 Gegeven zijn de functies $f(x) = (x^2 + x)\,e^x$ en $g(x) = (x^2 - x)\,e^x$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in de oorsprong en de lijn l raakt de grafiek van g in de oorsprong. Bewijs dat k en l elkaar loodrecht snijden.

b Op de grafiek van g ligt het punt A met $x_A = -2$. Onderzoek algebraïsch welke soort van stijging er is in A.



figuur G.18

c De grafiek van f heeft de buigpunten B en C met B links van C. De grafiek van g heeft de buigpunten D en E met D links van E. Bewijs dat geldt $x_C - x_B = x_E - x_D$.

d De lijn $x = p$ met $p < 0$ snijdt de grafiek van f in het punt F en de grafiek van g in het punt G. Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk FG.

De primitieven van de functies $h(x) = (px + q)\,e^x$ zijn van de vorm $H(x) = (ax + b)\,e^x + c$.

e Bewijs dit.

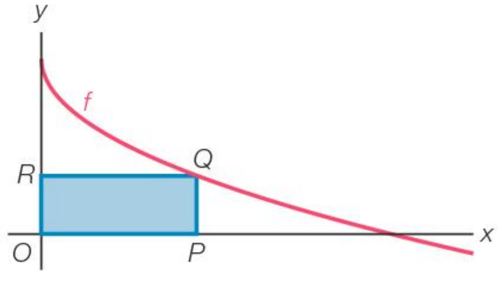
f Bereken exact op oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafieken van f en g en de lijn $x = -3$.

28 Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \sqrt{2x}$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as. Bereken exact de oppervlakte van V.

b In de figuur hiernaast is de rechthoek $OPQR$ getekend waarbij P op de x-as ligt en Q op de grafiek van f. De x-coördinaat van P is p. Bereken exact voor welke p de oppervlakte A van rechthoek $OPQR$ maximaal is.

c S is het punt $(8, 4)$ en T is een punt op de grafiek van f. De lengte van het lijnstuk ST is L. Bereken exact het minimum van L.



figuur G.19

29 Voor $p > 0$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = p\sqrt{x} - \ln(x)$.

a Bereken exact voor welke p de grafiek van f_p bij $x = 4$ overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

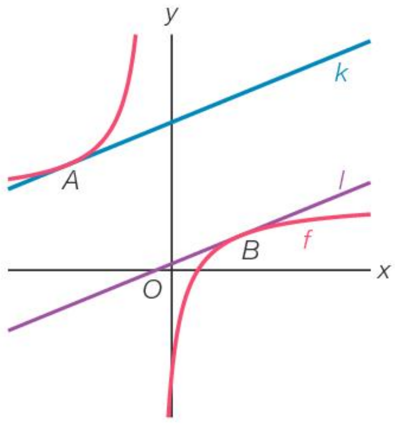
b Bereken exact voor welke p de top van de grafiek van f_p op de grafiek van $g(x) = 2\ln(x) - 4$ ligt.

30 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$.

Op de grafiek van f liggen de punten $A(-3, 3)$ en $B(2, 1)$. De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek in B. Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat k en l evenwijdige lijnen zijn en bereken exact de afstand tussen deze twee lijnen.

b De lijn m gaat door A en B. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn m en de x-as. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\ln(c)$ met c geheel.



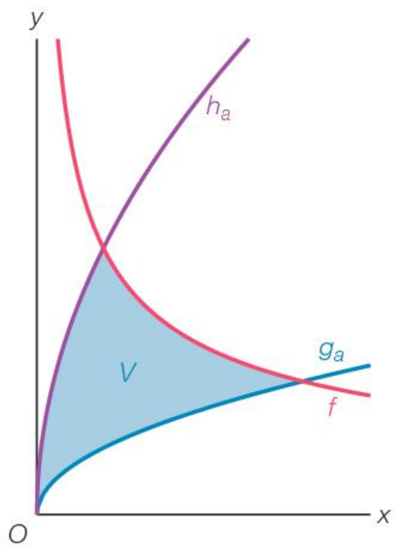
figuur G.20

31 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $g_a(x) = a\sqrt{x}$ en $h_a(x) = 4a\sqrt{x}$ met $a > 0$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f, g_a en h_a. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 4.

b De verticale lijn door het snijpunt van de grafieken van f en h_a verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2, waarbij $O(V_1) < O(V_2)$. De verhouding $O(V_1) : O(V_2)$ is onafhankelijk van a.
Bereken deze verhouding.



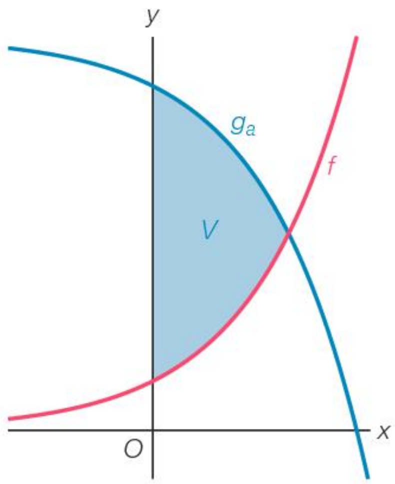
figuur G.21

32 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ en $g_a(x) = a - e^{\frac{1}{2}x}$ met $a > 1$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g_a en de y-as. Zie de figuur hiernaast.

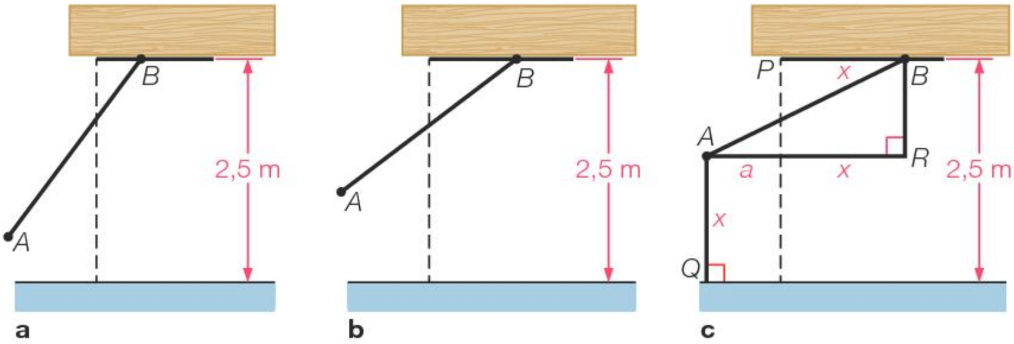
a Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 10. Rond af op drie decimalen.

b Het lichaam L ontstaat als V om de x-as wentelt. Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de inhoud van L gelijk is aan 400. Rond af op drie decimalen.



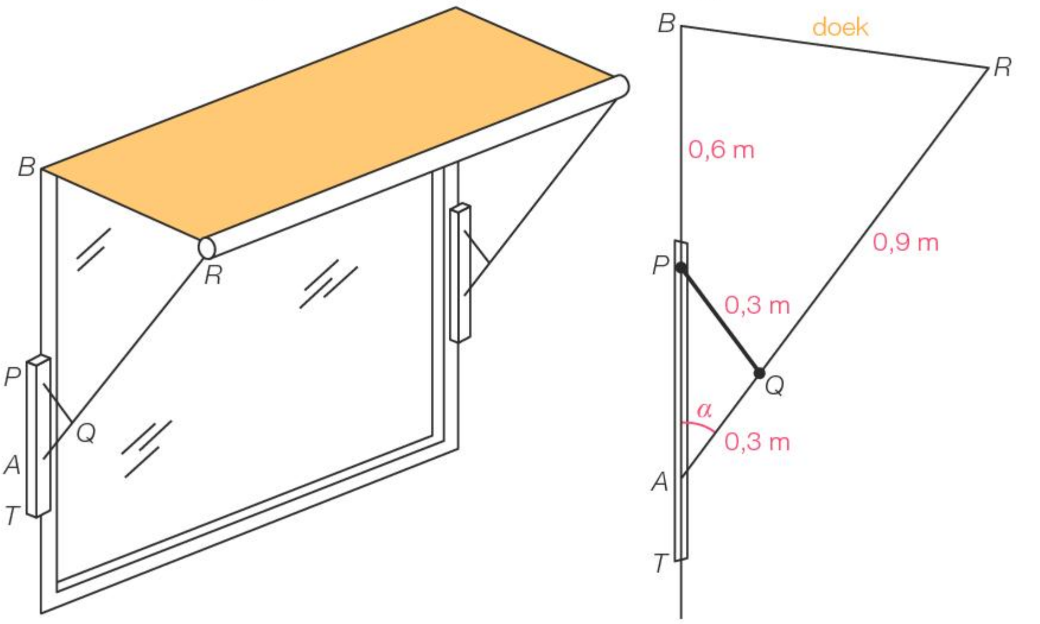
figuur G.22

33 Bij de garagedeur in figuur G.23 gaat het punt B even ver naar binnen als het punt A omhoog gaat.
Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Rond het antwoord af op gehele cm.



figuur G.23

34 In figuur G.24 zie je een ruimtelijke tekening en een zijaanzicht van een zonnescherm met glijarm AR.
Het uiteinde A van de stang AR kan glijden in de goot PT. De staaf AR is in Q scharnierend verbonden met de stang PQ die in P scharnierend aan de muur is bevestigd. De afmetingen staan in de figuur.



figuur G.24

De lengte BR van het uitgerolde doek hangt af van α met α in radialen.
Voor BR geldt de formule $BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}$.

a Bewijs dat deze formule juist is.

b Bereken in twee decimalen bij welke hoek α de lengte van het uitgerolde doek meer is dan 1 m.

c Bereken algebraïsch bij welke hoek α de lengte BR maximaal is. Rond het antwoord af op twee decimalen.

35 Bij dieren hangt het energieverbruik om zich voort te bewegen af van de lichaamsmassa.
Voor vogels is het energieverbruik E_v evenredig met $M_v^{-0,13}$. Hierbij is E_v de energie die nodig is om één kilogram lichaamsmassa over een afstand van één kilometer te verplaatsen en is M_v de lichaamsmassa in kg.
Voor een duif van 200 gram is $E_v = 3,3$.

a Bereken de evenredigheidsconstante. Rond af op twee decimalen.

Voor landdieren geldt $E_l = a \cdot M_l^b$.
Voor een konijn van 2 kg is $E_l = 2,5$ en voor een neushoorn van 2500 kg is $E_l = 0,24$.

b Bereken a en b. Rond af op twee decimalen.

Ga in de rest van deze opgave uit van $E_v = 2,7M_v^{-0,13}$ en $E_l = 3,2M_l^{-0,33}$.

c Bij welke lichaamsmassa gebruikt een vogel evenveel energie E als een landdier? Geef het antwoord in kg en rond af op één decimaal.

d Een vogel die twee keer zo zwaar is als een andere vogel, gebruikt p keer zo weinig energie om één kg lichaamsmassa over een afstand van één kilometer te verplaatsen als de lichtere vogel.
Een landdier dat twee keer zo zwaar is als een ander landdier, gebruikt q keer zo weinig energie om één kg lichaamsmassa over een afstand van één kilometer te verplaatsen als het lichtere landdier.
Schrijf de verhouding $p : q$ in de vorm $\sqrt[a]{b} : 1$ met a en b geheel.

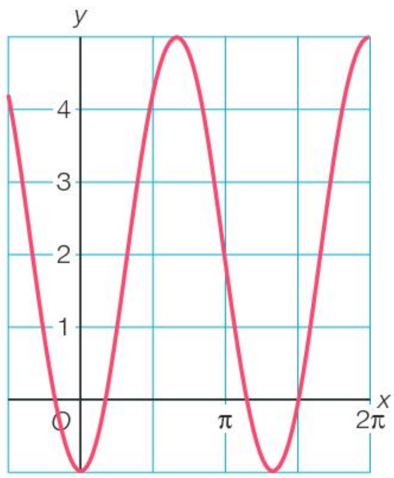
36 Teken de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x|$.

37 Primitiveer $f(x) = \cos(\pi(x - 3))$.

38 Los de vergelijking $x^3 + 10x = 7x^2$ algebraïsch op.

39 Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^2}$ in het punt A met $x_A = 1$.

40 In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$ en een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$.



figuur G.25

41 Gegeven zijn het punt $A(10, 0)$ en de cirkel c: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$.
Het punt P doorloopt c en het punt Q is het midden van AP.
Stel een vergelijking op van de kromme waarop Q ligt.

42 Bereken exact de extreme waarden van de functie $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\,e^x$.

43 De bewegingsvergelijkingen van het punt P zijn gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 4 - t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het snijpunt van de baan met de positieve y-as.

44 Bereken voor welke p de vergelijking $px^2 - 5x + 3 = 0$ twee oplossingen heeft.

45 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 10$. De lijn k raakt c in het punt $A(1, 3)$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door c, k en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

46 De cirkels c: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ en d: $x^2 + y^2 - 11x - 7y + 24 = 0$ snijden elkaar in de punten A en B.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

47 Voor elke $p > 0$ is gegeven de functie $f_p(x) = \dfrac{2x}{x^2 + p}$.
De grafiek van f_p heeft de toppen A en B.
Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan $\sqrt{10}$.

48 Los de vergelijking $x^4 + 9 = 6\frac{1}{4}x^2$ algebraïsch op.

49 Schrijf de formule $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \dfrac{8}{x^{-5}}$ in de vorm $y = ax^p$.

50 Bereken exact de extreme waarde van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x\sqrt{x}}$.

51 Op het interval $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 + \tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$.
Los exact op $f(x) > 2$.

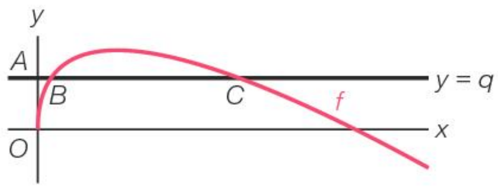
52 De cirkel c: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$ snijdt de x-as in de punten A en B met $x_A < x_B$. De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B.
Bereken exact de hoek tussen k en l.

53 Los de vergelijking $\ln^2(x) - 8\ln(x) + 12 = 0$ exact op.

54 De bewegingsvergelijkingen van het punt P zijn gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t + 1 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$
Bereken exact de coördinaten van het punt waar de baansnelheid minimaal is.

55 Een voorwerp in rust ondergaat gedurende vijf seconden de versnelling $a(t) = 0{,}12t^2$. Hierin is a in m/s^2 en t in seconden. Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer.
Hoeveel meter wordt in de eerste tien seconden afgelegd?

56 Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.
De lijn $y = q$ snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van f in de punten B en C waarbij $AB : BC = 1 : 3$. Zie de figuur hiernaast.
Bereken q exact.



figuur G.26

57 De top van de grafiek van de functie $f_p(x) = px^2 - 6x + 2$ ligt op de lijn $y = x$.
Bereken p algebraïsch.

58 De parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ gaat door de punten $(-2, -3)$ en $(6, 5)$.
Bereken b en c.

59 Schrijf $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}}$ als macht van a.

60 De afgeleide van $f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x} + 1}$ is $f'(x) = \frac{5x^3 + 6x^2\sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x} + 1)^2 \cdot \sqrt{x}}$.
Bewijs dat deze afgeleide juist is.

61 Bereken de afgeleide van $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$.

62 Gegeven zijn de lijn k: $\begin{cases} x = 3t + p \\ y = t + 1 \end{cases}$ en de cirkel c: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$.
Bereken exact voor welke p de lijn k de cirkel raakt.

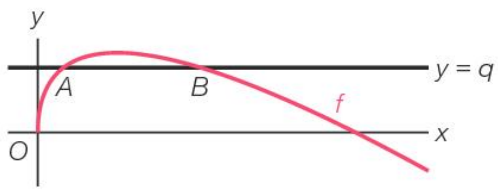
63 Bereken exact het minimum van de functie $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$.

64 Primitiveer $f(x) = (2x + 4)^3 + e^{2x+4}$.

65 Bereken in $[0, 2\pi]$ exact de oplossingen van de vergelijking $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$.

66 Er zijn twee cirkels met straal $\sqrt{5}$ waarvan de middelpunten op de lijn k: $y = x - 1$ liggen, die de lijn l: $y = 2x - 1$ raken.
Stel van deze cirkels een vergelijking op.

67 Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.
De lijn $y = q$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B waarbij A links van B ligt en de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan 4. Zie de figuur hiernaast.
Bereken q exact.



figuur G.27

68 Voor elke p zijn gegeven de functies $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - px + 2$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

69 Los de vergelijking $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x^3 - 4x$ algebraïsch op.

70 Schrijf de formule $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \dfrac{8}{x^{-5}}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

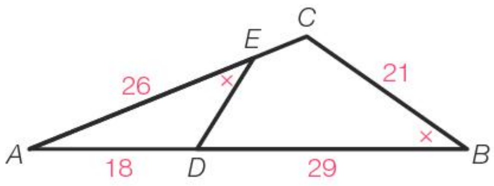
71 Bereken exact voor welke p de vergelijking $\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2 + 3} = p$ twee oplossingen heeft.

72 Differentieer $f(x) = x \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi)$.

73 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x + 2)$ en $g(x) = 1 + {}^3\log(2x - 11)$.
Los algebraïsch op $f(x) \geq g(x)$.

74 Gegeven zijn de lijn k door de punten $A(-3, -43)$ en $B(3, -25)$ en de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van k en l.

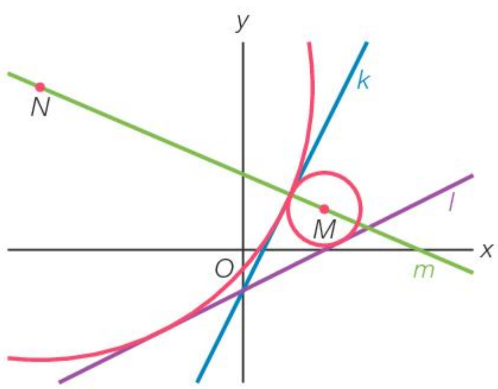
75 In driehoek ABC met $AB = 47$ en $BC = 21$ ligt het punt D zo op AB dat $AD = 18$. Het punt E ligt op AC zo, dat $\angle AED = \angle ABC$. Verder is gegeven dat $AE = 26$. Zie figuur G.28.
Bereken CE en DE. Rond af op één decimaal.



figuur G.28

76 Gegeven is de functie $f_a(x) = a + \dfrac{x+1}{x-1}$.
Bereken algebraïsch voor welke a de functie $g(x) = \dfrac{x-4}{x-6}$ de inverse is van f.

77 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - y = 1$, l: $x - 2y = 2$ en m: $3x + 7y = 13$.
Er zijn twee cirkels waarvan de middelpunten M en N op m liggen en die k en l raken. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact de afstand tussen M en N.



figuur G.29

78 Bereken langs algebraïsche weg voor welke a de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ en $g(x) = ax + 5$ elkaar raken.

79 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10x^2}{x^2 + 10}$.

Schets in twee aparte figuren onder elkaar de grafiek van f en de hellinggrafiek van f.

80 Los de vergelijking $\dfrac{3x - 5}{x^2 + 4} = \dfrac{6x - 10}{x + 36}$ exact op.

81 Los de vergelijking $4 \cdot 2^x = 4^{2x-1}$ algebraïsch op.

82 De functie $f_p(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x + p}$ heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

Bereken p en de andere extreme waarde.

83 Voor welke a en b vallen de lijnen k: $2x + ay = 12$ en l: $\begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = 2t + b \end{cases}$ samen?

84 Herleid de formule $y = \cos^4(x)$ tot de vorm $y = a + b\cos(2x) + c\cos(4x)$.

85 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1}$.

Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

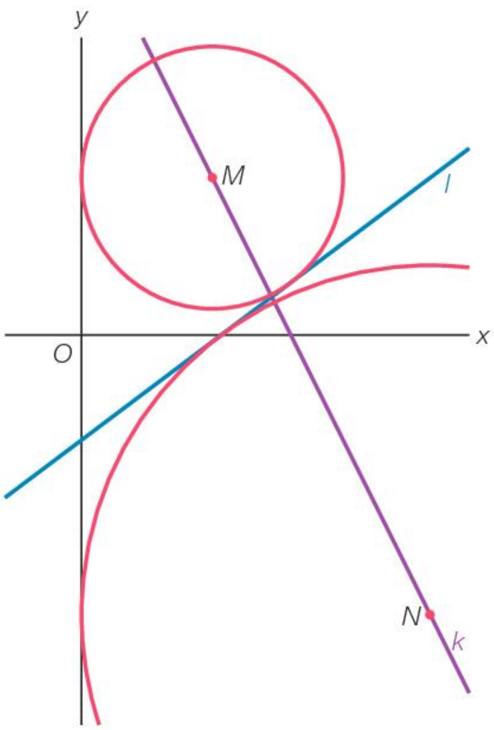
86 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g_p(x) = x^2 + px$.

Bereken in twee decimalen voor welke p de grafieken van f en g_p elkaar loodrecht snijden.

87 Gegeven zijn de lijnen k: $2x + y = 8$ en l: $3x - 4y = 8$.

Er zijn twee cirkels waarvan de middelpunten M en N op k liggen die zowel l als de y-as raken. Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van M en N.



figuur G.30

88 Bereken $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 5x + 6}$.

89 Bereken de afgeleide van $f(x) = x^3 + \dfrac{5x^2 + 1}{2x - 3}$.

90 Los de vergelijking $x^5 + 9 = 10x^2\sqrt{x}$ exact op.

91 Een hoeveelheid neemt exponentieel af.
Op $t = 5$ is $H = 942$ en op $t = 8$ is $H = 795$. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van H.

92 Bewijs dat alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + p}$ op de lijn k: $y = 2x$ liggen.

93 De lijn k snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, p)$.
Voor welke p gaat k door het punt $(6, 1)$?

94 Primitiveer $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x + 4 + \sqrt{x}}{x^2}$.

95 Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = 2 + (x - \frac{1}{2}\pi)\cos(x)$ lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

96 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = (x + a)\ln(x)$.
Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a bij $x = 3$ overgaat van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

97 Gegeven is driehoek ABC met $A(8, 1)$, $B(1, 1)$ en $C(4, 5)$.
De bissectrice van $\angle B$ snijdt de zijde AC in het punt D.
Bereken exact de coördinaten van D.

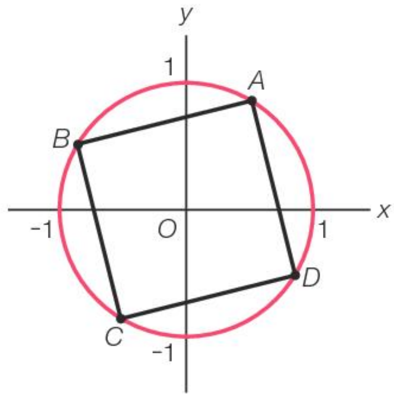
98 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x-3}$ en $g(x) = 3x - 1$.
De snijpunten van de grafieken van f en g zijn A en B met $x_A < x_B$.
De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafieken in de punten C en D.
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk CD.

99 Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

100 Herleid $\dfrac{x^4 - x^2 - 20}{x^4 - 2x^2 - 24}$.

101 Los exact op $2^{x-4} + 2^{x+1} = 66$.

102 Op de eenheidscirkel liggen de hoekpunten van het vierkant $ABCD$ waarbij $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is.
Bereken exact de coördinaten van de punten B, C en D.



figuur G.31

103 Bereken de coördinaten van de punten op de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ die afstand $\sqrt{2}$ hebben tot de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

104 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 10.

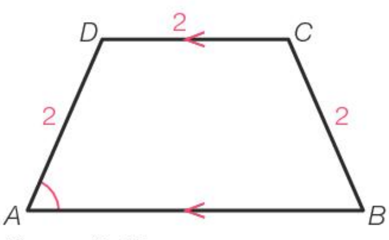
105 Primitiveer $f(x) = \cos^2(4x) + \sin^2(6x)$.

106 Voor x in $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies $f_a(x) = \dfrac{\sin^2(x) - a\cos(x)}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$.

Bereken algebraïsch voor welke a de grafiek van f_a een perforatie heeft.

107 Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door het punt $A(-1, 4)$ die de cirkel c: $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 5$ raken.

108 Gegeven is het gelijkbenig trapezium $ABCD$ met $AD = BC = CD = 2$.
Stel $\angle A = x$ rad met $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, druk de oppervlakte O van het trapezium uit in x en bereken exact de maximale oppervlakte van het trapezium.



figuur G.32

109 Op de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ ligt het punt A met $x_A = 1$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

110 Gegeven is de formule $F = 10 - \dfrac{K}{K+1}$.

Druk K uit in F.

111 Los exact op $9^x + 54 = 15 \cdot 3^x$.

112 Los de vergelijking $\cos^2(\frac{1}{2}x) - \cos(\frac{1}{2}x) - 2 = 0$ exact op.

113 Maak x vrij bij de formule $y = 2 + 3^{0{,}2x-1}$.

114 Stel vergelijkingen op van de lijnen met richtingscoëfficiënt 2 die de cirkel c: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ raken.

115 Primitiveer $f(x) = \dfrac{16}{(4x+10)^5}$.

116 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2 + 4\cos(2t)$ en $y(t) = 1 + 4\sin(2t)$ met t in seconden en t in $[0, \pi]$.
Bereken exact hoeveel seconden P zich links van de y-as boven de lijn $y = 1$ bevindt.

117 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x + a}$.

Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft en bereken de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

118 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $A(3, 1)$, $B(8, 1)$, $C(7, 3)$ en $D(6, 3)$.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het trapezium.

119 Primitiveer $f(x) = \dfrac{6x-5}{2x+1}$.

120 Van driehoek ABC is $AB = 8$, $\angle A = 32°$ en $\angle B = 90°$.
Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 3$.
Bereken $\angle ACD$.

121 Bewijs dat de functie $g(x) = \dfrac{3x-4}{2x-1}$ de inverse is van de functie

$f(x) = \frac{1}{2} - \dfrac{5}{4x-6}$.

122 Bereken in graden in één decimaal de hoek tussen de lijnen

k: $2x + 3y = 12$ en l: $\begin{cases} x = -3t - 10 \\ y = 7t + 2 \end{cases}$.

123 Los de vergelijking ${}^{3}\log(x + 1) = 4 + {}^{\frac{1}{3}}\log(x - 1)$ exact op.

124 Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door het punt $A(-1, -3)$ die de cirkel c: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ raken.

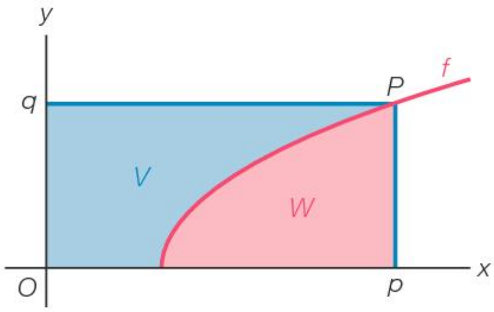
125 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = e^x$, de y-as en de lijn $y = p$.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 1.

126 Stel van elke asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{1 - 2\,e^x}$ de formule op en schets de grafiek van f.

127 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen
$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$.
Bereken exact de baansnelheid waarmee P voor de eerste keer de x-as passeert.

128 De baan van het punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 2t - 1 \end{cases}$
Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling van P in het raakpunt van de baan met de x-as.

129 Het punt $P(p, q)$ ligt op de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x - 1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $y = q$.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$. Zie figuur G.33.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de y-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de x-as.
Bereken met behulp van primitiveren voor welke p geldt dat $I(L) = 2 \cdot I(M)$. Rond af op twee decimalen.



figuur G.33

130 Van driehoek ABC is $\angle A = 100°$, $\angle B = 35°$ en $BC = 10{,}2$.
Bereken AB en AC. Rond af op één decimaal.

131 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $2\sin(2x) = -\sqrt{3}$.

132 Bereken exact de minimale afstand tussen de punten $A(2p, 3)$ en $B(2, p + 1)$.

133 Los de vergelijking $25^x + 6 = 5^{x+1}$ exact op.

134 Gegeven zijn de punten $A(4, 2)$, $B(1, 6)$ en $C(6, 8)$.
Bereken de hoek tussen de lijnen AB en AC. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

135 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ en de lijnen $x = 1$, $x = 4$ en $y = 1$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

136 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen
$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de baan van P maakt met de positieve x-as.

137 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3}$.
Schets de grafiek van f en bereken exact het bereik van f.

138 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door
$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$
Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

139 Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = 2\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$ hoort de parabool $y = 2 - 4x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$.
Toon dit aan.

140 Van driehoek ABC is $\angle A = 130°$, $AB = 8$ en $AC = 9$.
Bereken BC in één decimaal.

141 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f en geef het bereik.

142 Bereken exact de oplossingen van $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$.

143 Bereken exact de afstand van het punt $A(9, 2)$ tot de lijn k door de punten $B(-1, 2)$ en $C(0, 1)$.

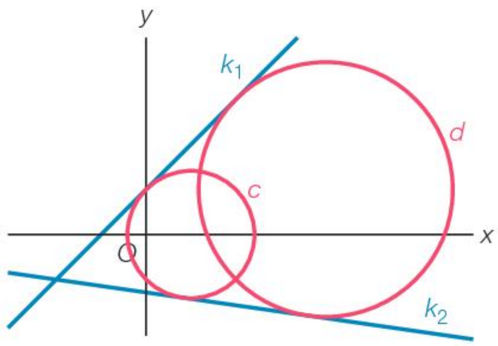
144 De halveringstijd van het isotoop polonium-209 is 103 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid polonium-209 per jaar afneemt. Rond af op twee decimalen.

145 Bereken de hoek tussen de lijnen $k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $l\colon 2x + 3y = 10$.
Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

146 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ en de lijnen $x = 1$, $x = 4$ en $y = 1$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 1$.

147 Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = -2 + {}^5\log(2x - 3)$ uit een standaardgrafiek?

148 Gegeven zijn de snijdende cirkels
c: $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ en d: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 8$.
De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van c en d. Zie de figuur hiernaast.
Stel van k_1 en van k_2 algebraïsch een vergelijking op.



figuur G.34

149 Stel van elke asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1}$ de formule op, bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$ en schets de grafiek van f.

150 De baan van het punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$
De baan snijdt zichzelf in een punt waarin de raaklijn aan de baan verticaal is.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

151 De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{5}(x - 3)^4 - 2$ wordt vermenigvuldigd met -10 ten opzichte van de x-as en vervolgens wordt de translatie $(5, -15)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Bereken de extreme waarde van g.

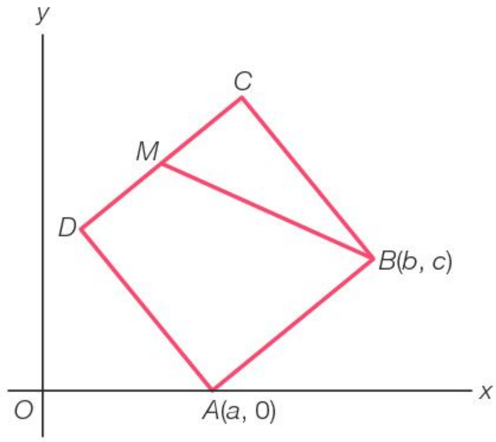
152 Gegeven is dat $2 + \dfrac{3}{x + 4}$ omgekeerd evenredig is met y.
Voor $x = 2$ is $y = 4$.
Stel de formule op van y in de vorm $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

153 Toon met de afgeleide aan dat de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.

154 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $A(8, 5)$ die de lijn k: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ raakt.

155 In de punten A en B van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 6.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

156 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(a, 0)$ en $B(b, c)$. Het punt M is het midden van zijde CD.
Bereken exact voor welke positieve waarden van a, b en c geldt dat BM een horizontaal lijnstuk met lengte 3 is en dat D op de y-as ligt.



figuur G.35

157 V is het linkervlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as en de grafieken van de functies $f(x) = 4x - x^2$ en $g(x) = 5 - 2x$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

158 Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = -2 + \sqrt{2x - 4}$ uit een standaardgrafiek? Geef ook het domein, het bereik en de coördinaten van het randpunt van de grafiek.

159 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{\ln(ax^2) + 2}{\ln(x) + 4}$.
Bereken algebraïsch voor welke a de grafiek van f_a een perforatie heeft.

160 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x + 1)^2}$.
Onderzoek algebraïsch welke soort van stijgen of dalen er is in de punten A, B en C van de grafiek van f met $x_A = -3$, $x_B = 1$ en $x_C = 4$.

161 Van driehoek ABC is $\angle A = 90°$ en $\angle B = 30°$. De oppervlakte van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC is 36π.
Bereken exact de omtrek van driehoek ABC.

162 De grafiek van de functie f ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 2 en vervolgens de translatie $(\frac{1}{4}\pi, -2)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

163 Maak B vrij bij de formule $A = 12 - 3\sqrt{1 - 2B}$.

164 Bereken algebraïsch voor welke waarden van a en b de lijn k: $y = -5x + 2$ buigraaklijn is van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x + b$.

165 Herleid $-\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

166 Bereken exact de afstand van het punt $A(2, 11)$ tot de cirkel c: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.

167 Los de vergelijking $e^{2x} - 6\,e^{x+1} + 5e^2 = 0$ exact op.

168 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$

Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

169 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \ln(\frac{1}{2}x + 1)$, de lijn $y = 1$ en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

170 Stel vergelijkingen op van de cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten op de lijn k: $x + 7y = 21$ liggen en die de lijnen l: $x + 2y = 1$ en m: $2x - y = 2$ raken.

Overzicht GR-modules

Module	
Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen • De toets Ans en fouten verbeteren • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen • Decimaal getal omzetten in breuk	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 14
Formules, grafieken en tabellen • Formules invoeren en grafieken plotten • Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Toppen en snijpunten • Toppen en snijpunten van grafieken • Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Helling • De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Het gebruik van Ans en lettergeheugens • De toets Ans • Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 100
Integreren • Integralen berekenen op het basisscherm • Integralen berekenen op het grafiekenscherm	vwo B deel 3 hoofdstuk 11 bladzijde 126
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Overzicht routes

13 Limieten en asymptoten

13.1 Limieten en perforaties

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
basis																	
midden																	
uitdagend																	

13.2 Sprongen en knikken in grafieken

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
basis										
midden										
uitdagend										

13.3 Asymptoten bij gebroken functies

opgave	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
basis																						
midden																						
uitdagend																						

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

opgave	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
basis													
midden													
uitdagend													

14 Meetkunde toepassen

14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
⊡ basis																				
⊙ midden																				
✱ uitdagend																				

14.2 Cirkels en raaklijnen

opgave	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
⊡ basis																
⊙ midden																
✱ uitdagend																

14.3 Cirkels en snijpunten

opgave	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
⊡ basis														
⊙ midden														
✱ uitdagend														

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

opgave	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
⊡ basis															
⊙ midden															
✱ uitdagend															

15 Afgeleiden en primitieven

15.1 Lijnstukproblemen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

15.2 Optimaliseringsproblemen

opgave	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
basis															
⊙ midden															
∗ uitdagend															

	30	31	32	33	34	35

15.3 Hellingen en buigpunten

opgave	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

	50	51	52	53	54	55	56	57	58

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

opgave	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

	73	74	75	76	77	78	79

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde B. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

Algebraïsch / op algebraïsche wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden.
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Trefwoordenregister

A

asymptotisch naderen *29*

B

baansnelheid *78*
baanversnelling *78*
bissectricepaar *54*

C

continu *10*
continuïteit *19*
continumakende
  waarde *10*

D

d-notatie *99*

E

evenredig *114*
evenredigheids-
  constante *114*

K

knik *20*

L

limiet *10*
linkerlimiet *18*

N

nul gedeeld door nul *27*

O

omgekeerd evenredig *114*
onbeperkt naderen tot *10*
ononderbroken
  kromme *10*

P

parametervoorstelling van
  cirkel *75*
perforatie *13*

R

rechterlimiet *18*
regels voor het
  primitiveren *118*

S

scheve asymptoot *29*
staartdelen *30*

Z

zwaartepunt *49*

Verantwoording

Beeld
Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Cartografie: Van Oort redactie en kartografie, Almere

Foto's
Fabrizio Bensch / Reuters: p. 6-7
Alamy Stock Photo / Imageselect: p. 44-45, 84, 176, 180
Anton Luhr / Imagebroker / Imageselect: p. 85
Shutterstock: p. 88-89, 116, 147, 230
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Merlin Daleman: p. 129
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Rob Engelaar: p. 132-133
ANP Foto / Erik-Jan Ouwerkerk: p. 143
iStockphoto: p. 146
Jeannette Tas / B en U: p. 214

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 22

ISBN 978-90-01-73712-2

LEERBOEK WISKUNDE B VWO DEEL 4

GEPERSONALISEERD LEREN

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
www.fsc.org

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73712-2

9 789001 737122